NOTAS DE AULAS DE FÍSICA MODERNA

Prof. Carlos R. A. Lima

CAPÍTULO 1

TEORIA DA RELATIVIDADE ESPECIAL

Primeira Edição – junho de 2005

CAPÍTULO 1 – TEORIA DA RELATIVIDADE ESPECIAL

ÍNDICE

1.1- Introdução
1.2- Transformações de Galileu
1.3- Relatividade Newtoniana
1.4- Eletromagnetismo e Relatividade Newtoniana
1.5- Experiência de Michelson - Morley
1.6- Tentativas para se “Salvar o Éter”
    1.6.1- Hipótese da Contração de Lorentz - Fitzgerald
    1.6.2- Hipótese do Arrastamento do Éter
1.7- Postulados da Teoria da Relatividade Especial
1.8- Cinemática Relativística
    1.8.1- Sincronização e Simultaneidade
    1.8.2- Transformações de Lorentz
    1.8.3- Transformação de Velocidades
    1.8.4- Efeito Doppler na Relatividade
    1.8.6- Diagramas Espaço – Tempo
    1.8.6- Intervalo no Espaço – Tempo
    1.8.7- Paradoxo dos Gêmeos
1.9- Dinâmica Relativística
    1.9.1- Momento Relativístico
    1.9.2- Energia Relativística
    1.9.3- Transformações do Momento, Energia, Massa e Força.
    1.9.3- Invariância da Energia de Repouso
    1.9.4- Partículas sem Massa

Nessa apostila aparecem seções, sub-seções e exemplos resolvidos intitulados como ***facultativos***. Os assuntos que se referem esses casos, podem ser dispensados pelo professor durante a exposição de aula sem prejuízo da continuidade do curso de Estrutura da Matéria. Entretanto, é desejável que os alunos leiam tais assuntos e discutam dúvidas com o professor fora do horário de aula. Fica a cargo do professor a cobrança ou não dos tópicos facultativos.

Excluindo os tópicos facultativos, esse capítulo deve ser abordado no máximo em ***6 aulas de quatro créditos***.

CAPÍTULO 01

TEORIA DA RELATIVIDADE ESPECIAL.

1.1 _ Introdução.

Até o final do século XIX pensava-se que todas a leis da física já tinham sido descobertas. As leis de Newton pareciam descrever todos os detalhes do movimento de um corpo, e as equações de Maxwell pareciam dá uma descrição completa para os fenômenos eletromagnéticos. Entretanto, logo no início do século XX, vários trabalhos desenvolvidos, por Planck, Einstein, Bohr, de Broglie e outros, levaram a elaboração de duas novas teorias. Uma teoria para explicar o comportamento de objetos que se movem com velocidades grandes, denominada de Teoria da Relatividade, e uma teoria aplicada a partículas microscópicas, denominada de teoria quântica.

A mecânica relativística, objeto de estudo deste primeiro capítulo, não substitui a mecânica clássica, mas situa-se como uma teoria mais completa que inclui as leis clássicas como casos especiais. A teoria da relatividade é usualmente constituída de duas partes, a teoria da relatividade especial, ou restrita, e a teoria da relatividade geral.

A primeira, desenvolvida por Einstein em 1905, adota um formalismo matemático bastante simplificado, e refere-se a uma comparação entre medidas efetuadas em diferentes referenciais inerciais que se deslocam uns em relação aos outros com velocidade constante. Por outro lado, também desenvolvida por Einstein em 1916, a relatividade geral refere-se a referenciais acelerados, adota um formalismo matemático bastante elaborado, e tem aplicações limitadas em áreas como cosmologia e gravitação. Raramente a relatividade geral tem aplicações em outras áreas da física ou engenharia e, por isso, nesse capítulo, aborda-se essencialmente os principais aspectos associados a teoria da relatividade especial.

1.2 - Transformações de Galileu

Para se efetuar medidas físicas em determinados referenciais é necessário considerar a definição de um evento físico. Um evento físico é algo que ocorre independentemente do sistema de referência, que se possa utilizar para descrevê-lo. Pode-se imaginar um evento como sendo, por exemplo, uma colisão de duas partículas ou o acender de uma determinada fonte de luz. O evento deve ocorrer num ponto do espaço e num determinado instante de tempo.

Um evento deve ser especificado num sistema quadridimensional, de três coordenadas espaciais e uma coordenada temporal. Um mesmo evento pode ser observado sobu o ponto de vista de diferentes sistemas de referências. Assim, se há a necessidade de se definir um evento, é necessário também se definir sistemas de referências.

Um referencial inercial é um sistema de referência no qual vale a primeira lei de Newton, ou lei da inércia, ou seja, na ausência de forças o referencial permanece em repouso ou em movimento retilíneo uniforme. Decorre desse fato, que qualquer referencial em movimento retilíneo uniforme em relação a um referencial inercial é também inercial.

Na prática pode-se desprezar os pequenos efeitos da aceleração do movimento orbital da terra, para considerar qualquer conjunto de eixos fixos à terra como um referencial inercial.

A teoria da relatividade especial, trata somente da descrição dos eventos por observadores em referenciais inerciais. Os corpos, cujos movimentos se estuda, podem estar acelerados em relação a tais referenciais, mas esses referenciais não são acelerados.

Considere um sistema inercial S' se movendo para a direita com velocidade constante de módulo v, em relação a outro referencial inercial S fixo à terra, como mostra a fig. 1.1.

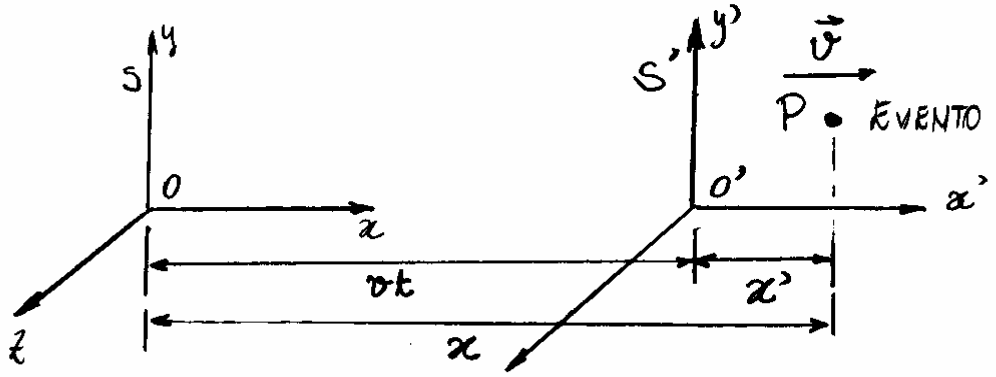


fig. 1.1 - Referencial S' movendo com velocidade de módulo v constante em relação ao referencial S.

Pode-se considerar igualmente o referencial S se movendo com velocidade $-v$ em relação a S'.

Considere um evento ocorrendo no ponto P, cujas coordenadas de espaço e tempo são medidas por observadores em cada referencial. O observador em S mede a localização e o tempo de ocorrência do evento, atribuindo valores às coordenadas espaciais x, y e z e temporal t. O mesmo é feito pelo observado em S', atribuindo valores às coordenadas x', y', z' e t'.

Para se determinar a relação entre as medidas x, y, z, t e x', y', z', t', considera-se que os dois observadores inerciais usam instrumentos calibrados e sincronizados entre si. O procedimento clássico supõe que os comprimentos e os intervalos de tempo são absolutos, isto é, são os mesmos para ambos os observadores inerciais dos mesmos eventos. Essa afirmação pode ser mostrada explicitamente como segue.

Se os relógios de cada observador marcam zero no instante em que as origens O e O' coincidem, então as relações entre as medidas x, y, z, t e x', y', z', t' serão:

$$x' = x - vt \quad ; \quad y' = y \quad ; \quad z' = z \qquad (1.1)$$

Uma suposição lógica é que o tempo pode ser definido independentemente de qualquer sistema de referência. Essa natureza universal do tempo pode ser representada por,

$$t' = t \qquad (1.2)$$

As equações (1.1) e (1.2), conhecidas como <u>Transformações de Galileu</u>, concordam com a nossa intuição clássica.

Da eq. (1.2) segue que, o intervalo de tempo entre a ocorrência de dois eventos P e Q é o mesmo para observadores em S' ou S, isto é:

$$t'_P - t'_Q = t_P - t_Q \qquad (1.3)$$

Por outro lado, as posições espaciais de dois pontos A e B se transformam, segundo a primeira eq. (1.1) por,

$$x'_A = x_A - vt_A \quad ; \quad x'_B = x_B - vt_B$$

ou,

$$x'_B - x'_A = x_B - x_A - v(t_B - t_A)$$

Como a medida de cada posição A e B são feitas no mesmo istante, ou simultaneamente, em ambos os referenciais, tem-se $t_A = t_B$, e portanto,

$$x'_B - x'_A = x_B - x_A \qquad (1.4)$$

ou seja, são também os mesmos as distancias medidas em ambos os referenciais. Note que a hipótese da <u>simultaneidade de medições</u> é uma condição crucial para que haja concordância, na medida de comprimento, por observadores de ambos os referenciais S e S'.

1.3 - <u>Relatividade Newtoniana</u>.

A questão agora é compreender como se comparam as medidas de diferentes observadores inerciais em relação às velocidades e acelerações dos objetos. A transformação de velocidade segue da derivação das eqs. (1.1), associadas às transformação Galileliana de coordenadas:

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - v \quad ; \quad \frac{dy'}{dt} = \frac{dy}{dt} \quad ; \quad \frac{dz'}{dt} = \frac{dz}{dt}$$

ou, como $t = t'$ e portanto $d/dt = d/dt'$, então:

$$u'_x = u_x - v \quad ; \quad u'_y = u_y \quad ; \quad u'_z = u_z \qquad (1.5)$$

onde,

$u'_x = dx'/dt'$, $u'_y = dy'/dt'$, $u'_z = dz'/dt$, e $u_x = dx/dt$, $u_y = dy/dt$, $u_z = dz/dt$, são as componentes das velocidades medidas em S' e S respectivamente. É evidente que no caso geral tem-se a <u>relação vetorial clássica</u> para a <u>transformação de velocidades</u>:

$$\vec{u}' = \vec{u} - \vec{v} \qquad (1.6)$$

<u>Exemplo 1.1</u>

Dois prótons são ejetados de um núcleo atômico radioativo em direções opostas, numa amostra de material radioativo em repouso no laboratório. Cada próton tem a velocidade de 0,95c, quando medida por um observador no laboratório. Qual é a velocidade de um próton quando medido pelo outro de acordo com a transformação clássica de velocidades?

Pode-se considerar um dos prótons como sendo o referencial fixo S, o laboratório como o referencial móvel S' e o outro próton como o objeto, cuja velocidade no referencial S se procura, veja a fig. 1.2.

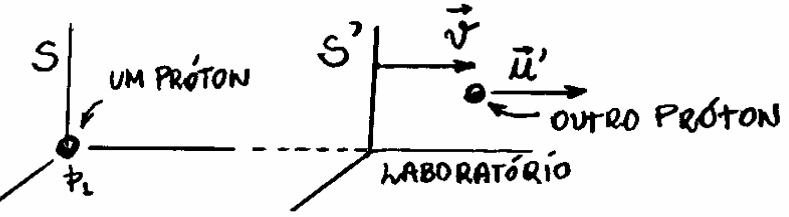


fig. 1.2 – Movimento de um próton do ponto de vista do outro próton.

Assumindo-se $u_x' = 0{,}95c$ e $v = 0{,}95c$ na primeira eq. (1.5), obtém-se:

$$0{,}95c = u_x - 0{,}95c \Rightarrow u_x = 1{,}9c$$

Essa seria então a velocidade de um próton do ponto de vista do outro próton de acordo com a transformação clássica de velocidades.

A <u>transformação clássica para a aceleração</u> pode ser obtida derivando-se as eqs. (1.5) ou (1.6):

$$a_x' = a_x \; ; \; a_y' = a_y \; ; \; a_z' = a_z \qquad (1.7)$$

ou,

$$\vec{a}' = \vec{a} \qquad (1.8)$$

uma vez que, sendo v uma constante, $dv/dt = 0$. Assim, as componentes medidas da aceleração de uma partícula <u>não são alteradas pela velocidade do referencial inercial</u>. Em outras palavras, quando a velocidade da partícula muda, a variação será a mesma para ambos os observadores.

Classicamente a <u>massa</u> também não se altera por causa do movimento do referencial inercial. Consequentemente, também é invariante a força que atua sobre a partícula, isto é:

$$\vec{F}' = \vec{F} \qquad (1.9)$$

Pode-se concluir então que, as leis de Newton de movimento e as equações de movimento de uma partícula são as mesmas em todos os referenciais inerciais. Em outras palavras, todas as leis da mecânica clássica devem ser invariantes ao movimento de um referencial inercial. Uma conseqüência desse fato é que nenhum experimento mecânico será capaz de revelar ao observador informações sobre o movimento de seu referencial inercial em relação a outros referenciais inerciais. Um jogador de billhar em um vagão fechado de um trem em movimento uniforme, não é capaz de dizer, pelo seu jôgo, qual é o movimento do trem em relação ao solo. O movimento das bolas de billhar não é capaz de revelar, se quer, se o trem está realmente em movimento. É evidente que é possível determinar a velocidade relativa entre dois referenciais inerciais comparando-se medidas em ambos os referenciais, mas jamais será possível deduzir essa velocidade relativa a partir de observações confinadas a um só referencial.

Também não há nenhum meio de determinar a velocidade absoluta de qualquer referencial inercial por meio de experiências mecânicas, uma vez que nenhum referencial inercial é privilegiado em relação a outro. De acordo com as leis da mecânica todos os referenciais inerciais são equivalentes, e portanto, não é

possível afirmar que existe um referencial em repouso absoluto. Por exemplo, uma pessoa viajando num trem não pode dizer de modo absoluto, se só ele se move, ou só a terra se move em relação a ele, ou se existe alguma combinação de movimento entre ele e a terra. O fato de que se pode falar somente da velocidade relativa de um referencial inercial em relação a outro, e não de uma velocidade absoluta de um desses referenciais, é denominado de Relatividade Newtoniana.

1.4 - Eletromagnetismo e Relatividade Newtoniana

A questão agora é saber se além das leis da mecânica, outras leis da física, tais como as leis do eletromagnetismo, são também invariantes em relação as transformações Galileianas. Se assim fôsse, então o princípio da relatividade Newtoniana poderia ser aplicada a todas as leis físicas. Isto é, em toda a física, não haveria referencial inercial privilegiado e, a velocidade de um referencial inercial não poderia ser determinada por experiências físicas realizadas unicamente nesse referencial.

As equações de Maxwell do eletromagnetismo, das quais se deduz a equação da onda eletromagnética, contém uma constante $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ que se indentifica como a velocidade de propagação de uma onda eletromagnética no vácuo.

Nos fins do século XIX, época em que a visão mecânica dominava, não se aceitava que um distúrbio eletromagnético pudesse se propagar no vácuo. Deu-se portanto o nome "éter" ao meio mecânico no qual as ondas eletromagnéticas se propagavam com velocidade constante c.

Considerando-se o éter como um referencial inercial S, então, de acordo com as transformações de velocidades Galileianas, um observador num referencial inercial S' que se move com velocidade v em relação ao éter, mediria uma velocidade desde $c+v$ até $c-v$ para um onda eletromagnética, dependendo da direção do movimento relativo. A velocidade da luz <u>não seria então constante</u> pelas transformações Galileianas. Como a velocidade da luz <u>não seria a mesma</u> para observadores inerciais diferentes, ao contrário das leis de Newton, as equações de Maxwell <u>não seriam conservadas</u> pelas transformações de Galileu.

Se fosse aceito tanto as transformações de Galileu quanto as equações de Máxwell <u>como corretas</u>, segue então que existe um único <u>referencial privilegiado em repouso absoluto (o éter)</u>, no qual as equações de Maxwell são válidas e a velocidade da luz é exatamente $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$.

O fato das transformações de Galileu dar diferentes interpretações para as leis de Newton da Mecânica e para as leis de Maxwell do Eletromagnetismo, nos leva a optar por uma das seguintes hipóteses:

1 - A relatividade Newtoniana se aplica à mecânica, mas não ao eletromagnetismo. No caso do eletromagnetismo deveria existir um referencial inercial privilegiado em repouso absoluto denominado de éter, onde as transformações de Galileu não se aplicam.

Se essa fosse a alternativa correta deveria ser possível determinar experimentalmente o éter.

2 - A relatividade Newtoniana se aplica tanto à mecânica quanto ao eletromagnetismo, mas, as leis do eletromagnetismo de Maxwell não estariam corretas.

Se essa alternativa fosse correta, seria possível determinar experimentalmente desvios das leis clássicas de Maxwell e reformular as novas leis do eletromagnetismo. As transformações de Galileu seriam aplicáveis à essas novas leis do eletromagnetismo.

3 - Uma relatividade, não a Newtoniana se aplicaria tanto à mecânica quanto ao eletromagnetismo, mas, as leis da mecânica de Newton não estariam corretas.

Se essa alternativa fosse correta, seria possível determinar experimentalmente desvios da mecânica Newtoniana e reformular as novas leis da mecânica.

A transformações de Galileu não seria aplicáveis, pois elas são inconsistentes com a invariância das leis de Maxwell mas, algumas outras que sejam consistente com o Eletromagnetismo clássico e com a nova mecânica.

Nas seções seguintes serão discutidos as bases experimentais que rejeitam as duas primeiras hipóteses. De fato a <u>terceira alternativa é a correta</u> e conduz à Relatividade de Einstein, onde a nova mecânica e as novas leis de transformação estão relacionadas aos objetos que se movem às altas velocidades.

1.5 - <u>Experiência de Michelson-Morley</u>.

Em 1881 A. A. Michelson e em 1887 Michelson e E.W. Morley utilizaram uma técnica interferométrica para medir a velocidade da luz em diferentes referenciais inerciais. O objetivo dessa experiência era de <u>detectar o éter como um referencial absoluto</u>.

No final do século IX não se aceitava que a luz, ou qualquer outra onda eletromagnética, pudesse se propagar na ausência de um meio.

Quando se diz que a velocidade do som no ar seco à temperatura de 0°C é 331,3 m/s, fica implícito a existência de um observador e um referencial, fixo no ar, através do qual a onda sonora se propaga.

Entretanto, quando se diz que a velocidade da luz no vácuo é $2{,}997925 \times 10^8$ m/s, não é claro que algum referencial está presente. Parecia então possível admitir a existência de um meio de propagação para todas as ondas eletromagnéticas, denominado éter, mesmo que fosse necessário atribuir propriedades incomuns para ele, tais como <u>densidade zero e transparência absoluta</u>.

Supondo a existência do éter como um referencial fixo, um observador na terra perceberia um "vento de éter", cuja velocidade v é igual a resultante das velocidades de rotação e translação da terra. Assumindo-se que $v = 30$ km/s, igual à velocidade de translação da terra em torno do sol, então

$$v/c \simeq 10^{-4} \qquad (1.10)$$

Um tratamento teórico do éter, desenvolvido por Fresnel e mais tarde por Lorentz, revelava que um teste da existência do éter necessitaria de uma experiência que medisse efeito de de termos $v^2/c^2 \simeq 10^{-8}$. Foi a <u>incrível sensibilidade da experiência de Michelson-Morley</u> que tornou possível tal experiência.

Para medir a velocidade da luz em relação ao éter, o interferômetro deveria ser alinhado com o braço OM_1 paralelo à direção do movimento da terra, como mostra a fig. 1.3.

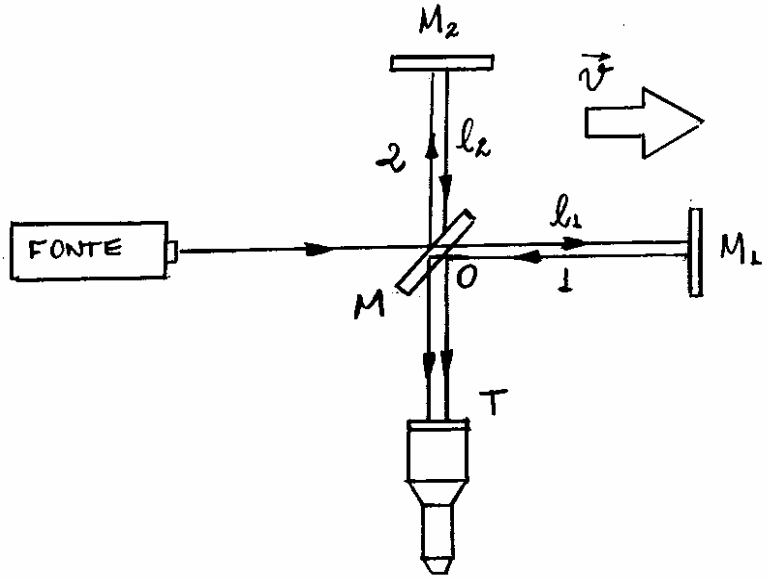


fig. 1.3 - Diagrama geral da Experiência de Michelson-Morley. Referencial do interferômetro.

Um feixe de luz de uma fonte, fixa em relação ao instrumento, é dividido em dois por um semi-espelho M. O feixe 1, denominado de braço 1 do interferômetro, é transmitido através de M e o feixe 2, denominado de braço 2 do interferômetro, é refletido em M. Esses feixes retornam, após refletirem nos espelhos M_1 e M_2, e interferem-se na região de um telescópio T. A fig. 1.4 mostra um padrão de franjas típico que se observa através do telescópio.

fig. 1.4 - Padrão de franjas típico que se observa com o interferômetro de Michelson-Morley.

A diferença de fase entre os feixes 1 e 2, responsável pelo padrão de interferência, pode ter origem tanto na diferença de caminho óptico entre esses feixes, quanto nas diferentes velocidades de percurso em relação ao éter. Para se obter a diferença de fase associada a segunda causa, é necessário se calcular o intervalo de tempo Δt que os feixes levam para percorrer caminhos de ida e volta.

O tempo do feixe 1 no percurso MM_1M será,

$$t_1 = \frac{l_1}{c-v} + \frac{l_1}{c+v} = l_1\left[\frac{c+v+c-v}{(c-v)(c+v)}\right]$$

$$= l_1\left[\frac{2c}{c^2-v^2}\right] = 2l_1\left[\frac{c}{c^2(1-v^2/c^2)}\right] = \frac{2l_1}{c}\gamma^2 \qquad (1.11)$$

onde,

$$\gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2} \qquad (1.12)$$

pois, de acordo com as transformações Galileianas, o feixe 1 tem velocidade $c+v$ no trajeto de ida e $c-v$ na volta. O tempo t_2 de propagação do feixe 2 pode ser determinado com o auxílio da fig. 1.5.

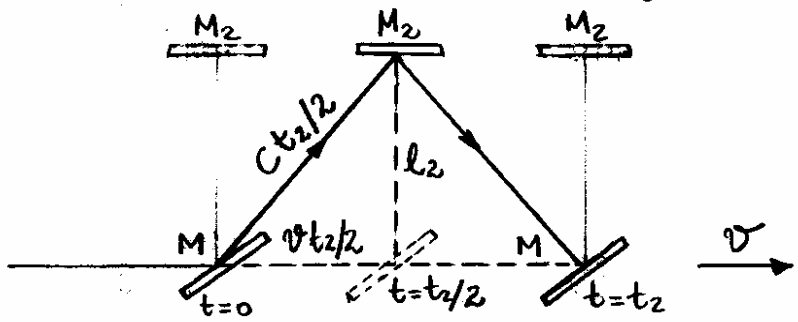


fig. 1.5 - Geometria do feixe transverso na experiência de Michelson-Morley. Referencial do Éter.

A fig. 1.5 mostra que,

$$(c\,t_2/2)^2 = (v\,t_2/2)^2 + \ell_2^2$$

$$\Rightarrow t_2^2(c^2 - v^2) = 4\ell_2^2 \quad \Rightarrow \quad t_2^2 c^2 (1 - v^2/c^2) = 4\ell_2^2$$

ou,

$$t_2 = \frac{2\ell_2}{c}\,\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{2\ell_2}{c}\,\gamma \qquad (1.13)$$

Assumindo-se $\ell_1 = \ell_2 = \ell$ nas eqs. (1.11) e (1.13), obtém-se o intervalo de tempo Δt entre os tempos de percurso t_1 e t_2, como

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{2\ell}{c}(\gamma^2 - \gamma) \qquad (1.14)$$

Pode-se simplificar esta expressão considerando-se $v/c \ll 1$, mediante a expansão binomial,

$$(1+x)^n = 1 + nx + n(n-1)\frac{x^2}{2} + \cdots \simeq 1 + nx \qquad (1.15)$$

para x pequeno. A partir disso, obtém-se

$$\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2} \simeq 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} \qquad (1.16)$$

$$\gamma^2 = (1 - v^2/c^2)^{-1} \simeq 1 + \frac{v^2}{c^2} \qquad (1.17)$$

A substituição dessas equações na eq. (1.14), fornece

$$\Delta t = \frac{\ell}{c}\,\frac{v^2}{c^2} \qquad (1.18)$$

O cálculo de t_2 se faz no referencial do éter, enquanto que o de t_1 no referencial do interferômetro. Como o tempo é absoluto em física clássica, então isso é perfeitamente aceitável. Note que seus efeitos dependem de um termo de segunda ordem $v^2/c^2 \approx 10^{-8}$, como se evidencia na eq. (1.18).

O intervalo de tempo, dado na eq. (1.18), está associado a uma fase δ_1 entre os feixes dada, por

$$\delta_1 = \frac{\Delta t}{T}$$

onde T é o período relacionado ao comprimento de onda da radiação utilizada no interferômetro, como mostra a fig. 1.6.

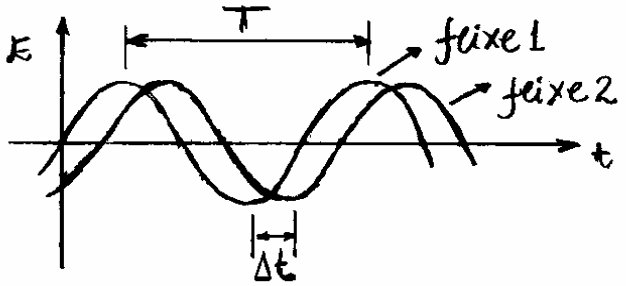


fig. 1.6 - Relações de fase entre as ondas eletromagnéticas planas para cada feixe, ou braço, do interferômetro.

Para se observar deslocamentos de franjas no interferômetro, é necessário comparar a fase δ_1 com alguma fase de referência. Poderia-se, por exemplo, comparar a fase δ_1, referente a terra em movimento, com a fase referente a terra em repouso.

Como não se pode parar a terra para fazer a experiência, a alternativa seria girar o interferômetro de 90°, e observar as posições das franjas nas duas situações. Se essa rotação fosse realizada, os feixes 1 e 2 trocariam de posições e, como eles tem o mesmo comprimento l, a diferença entre os tempos de percurso passariam a ser, $\Delta t^* = -\Delta t$, de modo que a nova fase δ_2 seria,

$$\delta_2 = \frac{\Delta t^*}{T} = -\frac{\Delta t}{T}$$

O número de franjas ΔN deslocadas no padrão interferométrico, tem uma correspondência equânime com a diferença de fase $\Delta\delta$ dada, por

$$\Delta N = \Delta\delta = \delta_1 - \delta_2 = 2\frac{\Delta t}{T} = 2\Delta t\,\nu = 2\Delta t\frac{c}{\lambda} \qquad (1.19)$$

pois, $T = 1/\nu$, e $c = \lambda\nu$. Substituindo a eq. (1.18) na eq. (1.19), obtém-se

$$\Delta N = \frac{2l}{\lambda}\frac{v^2}{c^2} \qquad (1.20)$$

Michelson e Morley construíram um interferômetro com vários espelhos, para tornar o percurso dos feixes tão grande quanto possível ($l \simeq 11m$). Foi montado sobre uma pedra

pesada que flutuava numa tina cheia de mercúrio, para que o aparelho pudesse girar facilmente em torno de um eixo central e, ao mesmo tempo, não sofresse perturbações mecânicas. Utilizando-se um comprimento de onda $\lambda = 590\,nm$, esperava-se um deslocamento de franjas:

$$\Delta N \simeq 0{,}4 \text{ franjas} \qquad (1.21)$$

Foram efetuadas diversas observações em diferentes horas do dia e em dias diferentes ao longo do ano. No entanto, jamais qualquer deslocamento de franjas teria sido observado.

O resultado nulo da experiência foi tão inesperado, que durante 50 anos ela foi repetida por vários pesquisadores.

Em 1958 J.P. Cedarholm, C.H. Townes e outros, fizeram uma experiência com microondas, cuja precisão era 50 vezes maior que a experiência de Michelson-Morley, e o resultado descaracterizava definitivamente o conceito do éter.

Uma forma de explicar o resultado nulo da experiência de Michelson-Morley, seria concluir simplesmente, que a velocidade da luz é a mesma em qualquer referencial inercial, pois, nesse caso, ambas as velocidades dos feixes seria c e não $c+v$ e $c-v$. No entanto, tal conclusão, contrariava as transformações de Galileu e isso seria muito drástico para a época.

1.6 - Tentativas para se "salvar o éter"

Na tentativa de "salvar o éter" e ainda preservar o resultado nulo da experiência de Michelson - Morley, cientistas de sua época sugeriram hipóteses alternativas, as quais se propõe detalhar a seguir.

1.6.1 - Hipótese da contração de Lorentz - Fitzgerald.

A hipótese de Fitzgerald, proposta em 1892 e complementada por Lorentz, sugere que todos os corpos sejam contraídos na direção do movimento relativo ao éter estacionário por um fator $\sqrt{1-\beta^2}$, com $\beta = v/c$. Com essa hipótese, os braços do interferômetro de Michelson-Morley devem ser reescritos, como

$$l_1' = l_1\sqrt{1-\beta^2} \quad e \quad l_2' = l_2$$

sendo agora l_1 e l_2, os comprimentos dos braços com o interferômetro em repouso. Nesse caso, os tempos nos trajetos de ida e volta de cada feixe seriam:

$$t_1 = \frac{2l_1'}{c}\gamma^2 = \frac{2l_1}{c}\sqrt{1-\beta^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2 = \frac{2l_1}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

e,

$$t_2 = \frac{2l_2'}{c}\gamma = \frac{2l_2}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Então,

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{2}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(l_1 - l_2) \qquad (1.22)$$

Similarmente, com a rotação de 90°, tem-se

$$l_1' = l_1 \quad , \quad l_2' = l_2\sqrt{1-\beta^2}$$

e,

$$\Delta t^* = \frac{2}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(l_1 - l_2) = \Delta t \qquad (1.23)$$

logo,

$$\Delta N = \Delta \delta = \delta_1 - \delta_2 = \frac{\Delta t}{T} - \frac{\Delta t^*}{T} = 0 \qquad (1.24)$$

e portanto, nenhum deslocamento de franjas seria observado.

Certamente a hipótese de Lorentz não era satisfatória e o argumento para se entender o motivo é simples:

Admitindo-se $l_1 \neq l_2$, para que a solução não seja trivial ($\Delta t = \Delta t^* = 0$), <u>mesmo com a contração de Lorentz</u>, poderia-se esperar deslocamento de franjas, quando a velocidade do interferômetro mudar de v para v'. Pode-se mostrar que o deslocamento previsto nesse caso, é

$$\Delta N = \frac{l_1 - l_2}{\lambda}\left(\frac{v^2}{c^2} - \frac{v'^2}{c^2}\right) \qquad (1.25)$$

Em 1932, Kennedy e Thorndike, usando um interferômetro com $l_1 - l_2 \simeq 16\,cm$, realizaram

a experiência apropriada. Os dados da experiência foram colhidos nos instantes em que a variação na velocidade de rotação da terra é máxima (intervalo de 12 horas) e a variação na velocidade de translação da terra é máxima (intervalo de 6 meses). Também nessa experiência, nenhum efeito foi observado ($\Delta N = 0$), em direta contradição com a hipótese de contração.

1.6.2 - Hipótese do Arrastamento do Éter.

Com esta hipótese admite-se que o éter esteja ligado a todos os corpos de massa finita e é arrastado com tais corpos. Como não haveria movimento relativo entre o interferômetro e o éter, o resultado da experiência de Michelson-Morley seria automaticamente nulo. Entretanto, existiam dois efeitos bem estabelecidos, que se opunham a hipótese de arrastamento do éter: A aberração das estrelas e o coeficiente de convecção de Fizeau.

A aberração das estrêlas foi observada em 1727 por Bradley, e tinha como base o movimento circular desses corpos por causa do movimento da terra. Esse efeito pode ser facilmente verificado observando-se uma estrêla na vertical utilizando-se um telescópio. Se a terra e a estrêla estivessem fixas no éter, o telescópio teria que ser apontado diretamente para cima para que a estrêla fosse vista a todo momento, como mostra a Fig. 1.7(a).

Por outro lado, se a terra se movesse para a direita, através do éter com velocidade v, enquanto a estrêla se mantivesse fixa, para que ésta seja vista, seria necessário inclinar, levemente, o telescópio, como mostra a fig. 1.7(b). Nessa situação, a luz que atingisse a objetiva do telescópio conseguiria alcançar a sua ocular.

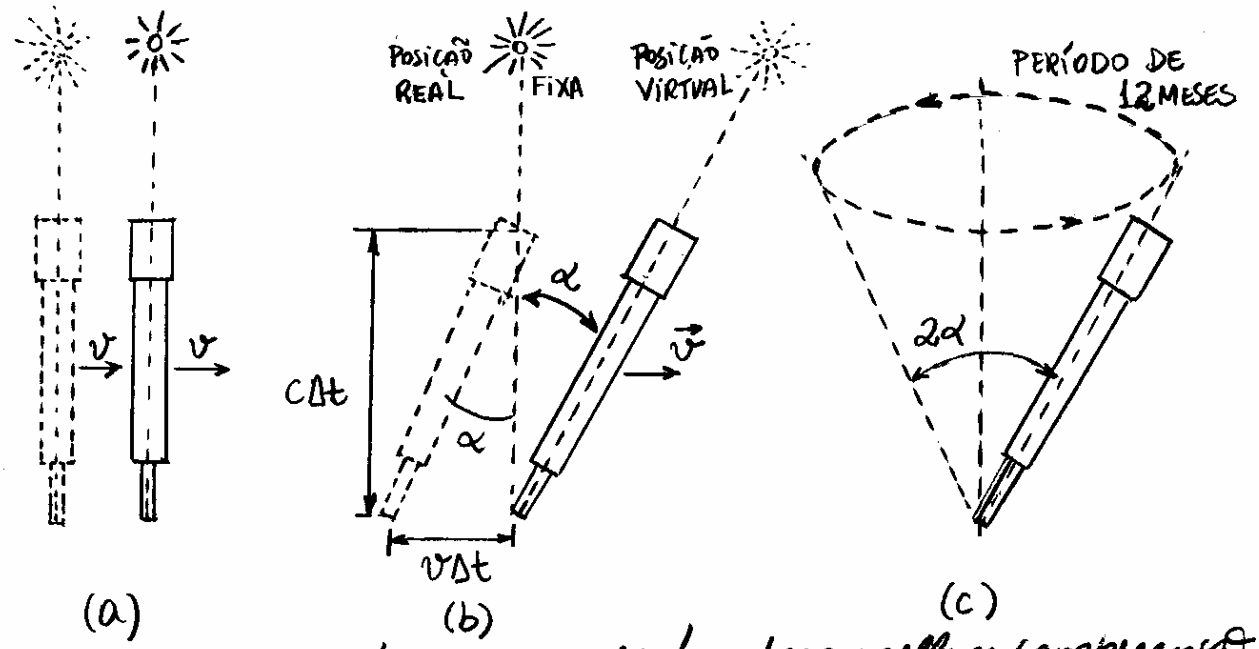


Fig. 1.7 – Representação exagerada, para melhor compreensão, da aberração de estrelas por ocasião do movimento da terra.

Durante o intervalo de tempo Δt que a luz caminha a distância da objetiva à ocular $c\Delta t$, o telescópio é deslocado de uma distância $v\Delta t$ para a direita. Assim, o ângulo α de inclinação do telescópio, seria

$$tg\alpha = \frac{v\Delta t}{c\Delta t} = \frac{v}{c} \qquad (1.2b)$$

Já se sabia que a terra gira em torno do Sol com velocidade $v = 30\,km/s$. Como $c = 3\times10^5\,km/s$, obtém-se, $\alpha = 20,5''$ de arco. O movimento da terra é praticamente circular, de modo que a direção de observação se inverte a cada 06 meses, e o eixo do telescópio deve traçar um cone de aberração de abertura angular $2\alpha = 41''$ durante o ano. Essas observações mostram que a hipótese do arrastamento do éter não é justificável. Consequentemente, a suposta "falha" na experiência de Michelson-Morley não poderia ser justificada por essa hipótese.

Um outro efeito que contradiz a hipótese de arrastamento do éter, previsto por J.A. Fresnel, em 1817, está relacionado com um arrastamento parcial da luz por um meio em movimento, tal como um suposto éter. O efeito foi confirmado experimentalmente por Fizeau em 1851. A montagem experimental de Fizeau é mostrada na fig. 1.8.

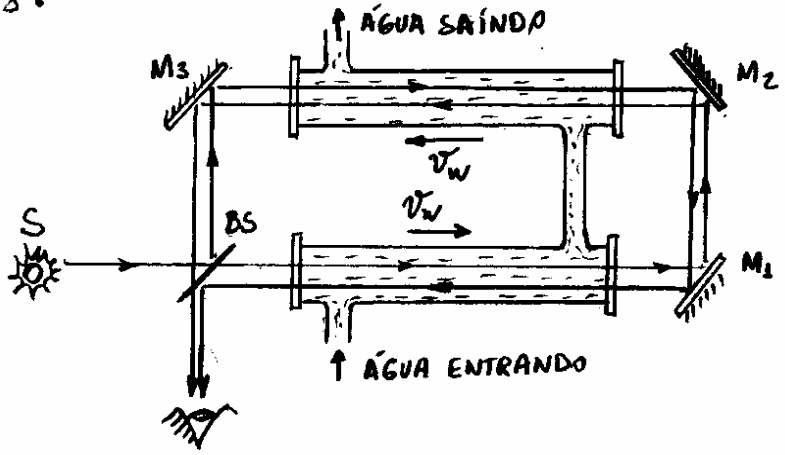


fig. 1.8 - Montagem experimental de Fizeau.

Trata-se de um interferômetro onde a luz de uma fonte S é parcialmente transmitida e refletida por um divisor de feixe BS. Antes de interferirem-se, os feixes atravessam regiões de fluxos contrários de água de velocidades v_w constante, e refletem-se nos espelhos M_1, M_2 e M_3. Franjas de interferência, associadas as diferenças de caminho óptico dos feixes, podem ser vistas por um observador.

De acordo com a teoria eletromagnética, o vetor deslocamento elétrico é,

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \qquad (1.27)$$

O primeiro termo depende do campo elétrico $\vec{E}$ no vácuo e o segundo termo é a polarização $\vec{P}$, que por sua vez depende do meio refrator. Somente o segundo termo de $\vec{D}$ contribui para a diferença entre as velocidades das ondas eletromagnéticas num meio refrator em movimento e num meio refrator estacionário. Utilizando como base essa análise, Fresnel mostrou que a velocidade v da luz, em um <u>meio de índice de refração n</u>, que se move com velocidade v_w é dada, por

$$v = \frac{c}{n} \pm v_w\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \qquad (1.28)$$

onde o fator $(1 - 1/n^2)$ é denominado de <u>coeficiente de arrastamento de Fresnel</u>. A velocidade da luz no meio c/n é alterada por causa do movimento do meio. Como o fator $(1 - 1/n^2) < 1$, o aumento ou a

diminuição de v é menor que v_w, daí o termo "arrastamento". Note-se que para $n=1$ ("vácuo em movimento"), a eq. (1.28) reduz-se a $v=c$.

Na experiência de Fizeau, a água flui com uma velocidade $v_w = 7$ m/s. As medidas de Fizeau confirmaram a previsão de Fresnel. A experiência foi repetida por Michelson e Morley em 1886, e por P. Zeeman e outros depois de 1914, com muito mais precisão, confirmando novamente a previsão de Fresnel.

Se o éter fosse arrastado junto com a água, a velocidade da luz, de acordo com as transformações de Galileu, teria sido $c/n + v_w$ em um tubo e $c/n - v_w$ no outro, de modo que o coeficiente de arrastamento de Fresnel $(1-1/n^2)$ deveria ser igual a unidade. Entretanto, a experiência de Fizeau mostra que isso não ocorre, e portanto, a hipótese de arrastamento do éter é contraditório.

Vimos que a hipótese do éter é insustentável. Em adição a isso, experiências mostram que as leis da Eletrodinâmica estão corretas e não necessitam de qualquer modificação. A velocidade da luz, ou qualquer radiação eletromagnética, é independente do movimento de qualquer referencial inercial. Conclue-se portanto que as leis básicas da mecânica, consistentes com as transformações de Galileu, precisam ser modificadas.

1.7 - Postulados da Teoria da Relatividade Especial.

Independentemente da existência ou não do éter, do ponto de vista da física clássica, a experiência de Michelson-Morley deveria ser capaz de alcançar os seus objetivos. O problema está justamente neste argumento, isto é, a física clássica não pode ser aplicada a este problema. Em 1905, aos 26 anos de idade, Albert Einstein enuncia os postulados da teoria da Relatividade Especial, cujas conseqüências explicaria as falhas na experiência de Michelson-Morley. Enunciados com simplicidade esses postulados são:

Postulado 1: As leis da Física são as mesmas em qualquer referencial inercial. Não existe nenhum referencial inercial privilegiado.

Postulado 2: A velocidade da luz no vácuo é independente de qualquer referencial inercial.

Embora pareçam razoáveis, estes postulados tem implicações que, na verdade, fogem ao bom senso. Por exemplo, uma importante conseqüência é o fato de qualquer observador medir o mesmo valor da velocidade da luz no vácuo, independentemente do movimento relativo entre ele e a fonte. É exatamente este fato que explica a falha na experiência de Michelson-Morley.

A simplicidade, o arrojo e generalidade da teoria da Relatividade Especial são características do gênio de Einstein, e o seu sucesso ficou confirmado por inúmeras experiências posteriores.

Foi a natureza absoluta do tempo que levou Einstein a suas propostas revolucionárias. A descrição da Teoria da Relatividade Especial deve seguir o seguinte roteiro:

- Primeiro é necessário obter equações de transformação entre dois referenciais inerciais se movendo uniformemente, mantendo invariância da velocidade da luz.

- Segundo será necessário examinar as leis da Física e verificar suas conservações com esta transformação. As leis que não conservarem deverão ser generalizadas para obedecer o princípio da relatividade.

As novas equações de transformação obtidas com base nos postulados da Teoria da Relatividade Especial, ficaram conhecidas, por razões históricas, como a <u>transformação de Lorentz</u>.

Espera-se que todas as generalizações decorrentes da Teoria da Relatividade Especial seja tal que as novas leis se reduzam as velhas para velocidades muito menores do que a velocidade da luz no vácuo.

1.8 - Cinemática Relativística.

1.8.1 - Sincronização e Simultaneidade.

Uma das hipóteses clássicas que mais intrigava Einstein era com respeito a universalidade do tempo, explícita nas transformações de Galileu como $t = t'$, o qual era o mesmo para qualquer observador. Para se estabelecer uma escala universal de tempo seria necessário se ter uma compreensão mais profunda de afirmações do tipo: "Dois eventos A e B ocorrem no mesmo instante de tempo". Como assinalou Einstein, quando se diz que um trem chega às 7 horas, fica implícito que a indicação exata do ponteiro do relógio no 7 e a chegada do trem nessa hora foram simultâneos. Se diferentes observadores inerciais divergirem na simultaneidade dos dois eventos, certamente não se terá uma escala universal de tempo. Pode-se então estabelecer mesmas escalas de tempo em diferentes referenciais inerciais, e comparar o que os diferentes observadores tem a dizer sobre a seqüência de dois eventos A e B.

Se os eventos A e B ocorrem no mesmo local, por exemplo, o acender e o apagar de uma fonte luminosa, então é necessário apenas um único relógio para medi-los. Por outro lado, se os dois evento ocorrem em locais diferentes, por exemplo, o piscar de duas fontes luminosas,

então são necessários dois relógios para medí-los. Esses relógios devem ser sincronizados e colocados nos locais de cada evento, como mostra a fig. 1.9.

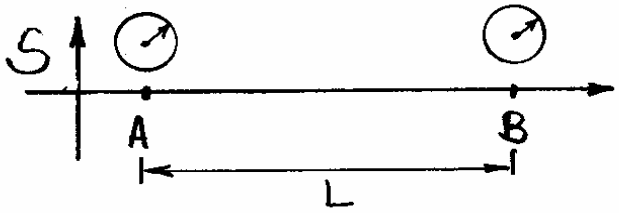


fig. 1.9 – Relógios nos locais de eventos A e B num referencial inercial S.

O primeiro problema é a sincronização dos dois relógios separados por uma distância L. Se um observador em A olha para o relógio em B e acerta o seu relógio para registrar o mesmo instante, os relógios não estarão sincronizados por causa do tempo L/c necessário para a luz percorrer a distância entre os dois relógios. A sincronização dos relógios só será possível quando o observador em A adiantar de L/c o seu relógio em relação ao relógio em B. Somente para observadores em A e B os relógios estarão sincronizados. Para quaisquer outros observadores esses relógios não estarão sincronizados. Com essa discussão pode-se concluir que:

"Dois relógios sincronizados num referencial não estarão sincronizados em nenhum outro referencial que esteja em movimento em relação ao primeiro."

Um outro problema importante é o da simultaneidade. Suponha que dois observadores sincronizem seus relógios num mesmo local, e combinem emitir um sinal luminoso num mesmo instante t_0, a partir dos pontos A e B. Um terceiro observador em C, equidistante de A e B, concluirá que os dois sinais foram emitidos simultaneamente, como sugere a fig. 1.10. Entretanto, qualquer outro observador, não equidistante de A e B, tais como D e E, concluirá que os dois eventos não são simultâneos.

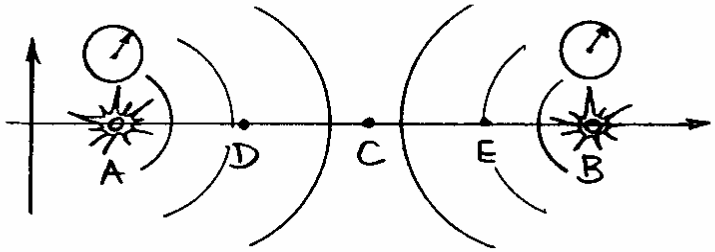


fig. 1.10 - Simultaneidade entre dois eventos.

Agora a questão é analizar a simultaneidade de dois sinais do ponto de vista de dois observadores em diferentes referenciais inerciais.

Seja um referencial S' como sendo um vagão que se move com velocidade v em relação a um referencial S, como mostra a fig. 1.11. Sejam os pontos A' e B' nas duas extremidades do vagão, e um ponto C' no meio do vagão.

Sejam também os pontos A, B, C nas mesmas posições num instante inicial t_0, só que no referencial fixo S. Se duas fontes luminosas, colocadas em A e B, emitem sinais simultâneos no referencial S no instante t_0, estes serão simultâneos para um observador em C. Entretanto, para um observador em C', os sinais não serão simultâneos, como sugere a fig. 1.11.

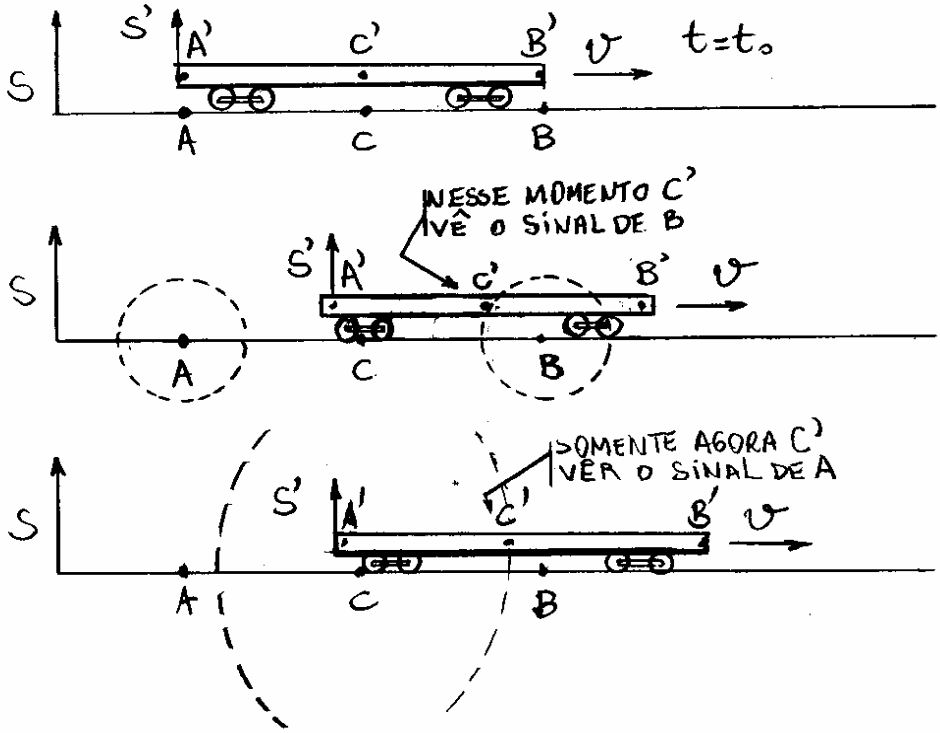


fig. 1.11 - Sinais simultâneos emitidos dos ponto A e B.

Note-se que o sinal emitido de B é visto por C', antes do emitido de A, pois C' move-se em direção a B, ao mesmo tempo que se afasta de A. Assim, para o observador em C', os sinais emitidos por A e B não são simultâneos.

As mesmas conclusões seriam tiradas quando os eventos fossem realizados no referencial S'. Portanto, nenhum dos referenciais é privilegiado e a situação é perfeitamente recíproca. Nenhum dos observadores pode afirmar de uma maneira absoluta que se encontra em repouso. Ao invés disso, cada observador afirma corretamente que o outro está em movimento relativo a ele e que os sinais se deslocam com velocidade c. Assim, a simultaneidade é genuinamente um conceito relativo, e não absoluto.

Com a discussão acima pode-se concluir que:

"Dois eventos simultâneos num referencial inercial não serão simultâneos em outros referenciais inerciais que se movem em relação ao primeiro."

Uma consequência imediata do conceito de simultaneidade se dá na medida de comprimentos. Por exemplo, a medida do comprimento do vagão da fig. 1.11 vai depender de uma localização simultânea de suas extremidades. Portanto, a medida de comprimento dependerá do referencial e será também relativa.

Na seção seguinte, a relatividade dos conceitos de simultaneidade e comprimento será abordado quantitativamente.

1.8.2 – Transformações de Lorentz.

Seja um evento num referencial inercial S, cujas características de localização e tempo são especificadas por meio das coordenadas x, y, z, t. Num segundo referencial inercial S', este mesmo evento é registrado por meio das coordenadas x', y', z', t'. Deseja-se encontrar as relações funcionais:

$$x' = f(x,y,z,t)\,,\quad y' = f(x,y,z,t)\,,\quad z' = f(x,y,z,t)\,,\quad t' = f(x,y,z,t)$$

Isto é, deseja-se encontrar as equações de transformação, que relacionam as coordenadas do espaço-tempo de um evento, vistas por um observador, com as coordenadas do mesmo evento vistas pelo outro observador.

Pode-se simplificar a álgebra, escolhendo-se a velocidade relativa entre os referenciais S e S', como sendo paralela aos eixos x e x', e mantendo-se os planos correspondentes paralelos, como se fez na dedução das transformações de Galileu, na seção 1.3. Isso não restringe em nada os resultados, uma vez que o espaço-tempo é isotrópico e homogêneo. A hipótese da homogeneidade do espaço-tempo exige que as equações de transformação sejam lineares, isto é

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t \;;\quad y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}t \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}t \;;\quad t' = a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t \end{aligned} \qquad (1.29)$$

Se as equações não fossem lineares, a hipótese de homogeneidade espacial seria violada. Isso significaria, por exemplo, que o comprimento medido de uma barra dependeria de onde ela se encontra no espaço. Similarmente, pode-se rejeitar qualquer dependência com t, que não seja linear, pois as posições de um ponteiro do relógio do observador não seriam as mesmas para o intervalo de tempo entre dois eventos.

Com relação aos 16 coeficientes das eqs. (1.29), espera-se que seus valores dependam da velocidade v relativa dos dois referenciais inerciais. Se $v=0$, então os dois referenciais coincidem o tempo todo, de modo que, $a_{11}=a_{22}=a_{33}=a_{44}=1$, e todos os outros seriam nulos. Deve-se procurar as dependências desses coeficientes para o caso geral em que $v \neq 0$.

O eixo x coincidirá continuamente com o eixo x' se, pontos sobre o eixo x $(y=z=0)$ puder resultar em pontos sobre o eixo x' $(y'=z'=0)$. Para que isso ocorra, é necessário que os coeficientes a_{21}, a_{24}, a_{31} e a_{34} se anulem nas equações para y' e z' em (1.29), de modo que

$$y' = a_{22}y + a_{23}z \quad ; \quad z' = a_{32}y + a_{33}z$$

Similarmente, Para que pontos do plano xy $(z=0)$ possa resultar em pontos do plano $x'y'$ $(z'=0)$, e pontos do plano xz $(y=0)$ possa resultar em pontos do plano $x'z'$ $(y'=0)$, é necessários que

os coeficientes a_{23} e a_{32} se anulem, de modo que as equações anteriores, tornam-se

$$y' = a_{22} y \quad ; \quad z' = a_{33} z \qquad (1.30)$$

Seja uma barra colocada ao longo do eixo y de comprimento unitário ($y=1$), como mostra a fig. 1.12(a). De acordo com a eq. (1.30), para um observador no referencial S', o comprimento da barra, será

$$y' = a_{22} \times 1 = a_{22} \qquad (1.31)$$

Se agora, a mesma barra for colocada no referencial S', o observador em S' deve medir o mesmo comprimento unitário para a barra ($y'=1$), como mostra a fig. 1.12(b).

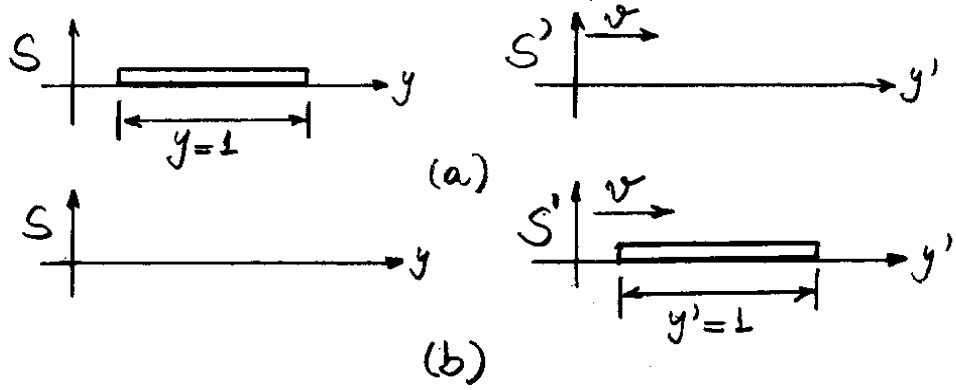


fig. 1.12 – Comprimento de uma barra medido nos referenciais S e S'.

Entretanto, nesse caso, de acordo com a eq. (1.30), o observador em S mediria o comprimento da barra, como sendo

$$y = \frac{1}{a_{22}} \times 1 = \frac{1}{a_{22}} \qquad (1.32)$$

Para que os sistemas sejam fisicamente equivalente, exigência do primeiro postulado de Einstein, é necessário que as duas medidas da mesma barra eqs. (1.31) e (1.32), sejam rigorosamente as mesmas, isto é, $a_{22} = 1/a_{22}$, ou, $a_{22} = 1$. Argumentos idênticos podem ser utilizados para concluir que $a_{33} = 1$. Portanto, as equações de transformação (1.30), tornam-se

$$y' = y \quad ; \quad z' = z \qquad (1.33)$$

Restam ainda analisar as equações de transformação para t' e x' em (1.29). <u>Não se pode esperar</u> a dependência de <u>t' com y e z</u>, pois relógios colocados simetricamente nesses eixos ($\pm y$ ou, $\pm z$), <u>discordariam</u> quado vistos de S', <u>contrariando a isotropia do espaço</u>. Lembre-se que nessas dimensões não há movimento relativo e as leituras dos relógios devem ser as mesmas. Para que isso não ocorra é necessário que $a_{42} = a_{43} = 0$ na última eq. (1.29), isto é

$$t' = a_{41}x + a_{44}t \qquad (1.34)$$

Quanto a transformação para x', nota-se da fig. 1.13, que um ponto $x' = 0$ em S' se desloca com uma velocidade v na direção positiva do eixo x.

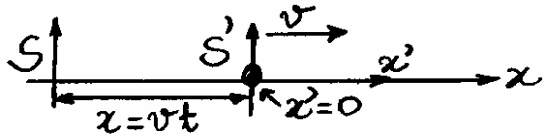


fig. 1.13 – Movimento de um ponto $x' = 0$ em S.

Para se ter $x'=0$ quando $x=vt$, deve-se esperar que:

$$x'=\alpha(x-vt) = \alpha x - \alpha v t$$

que comparada com a primeira equação de transformação em (1.29) conclui-se, que

$$a_{11}=\alpha \;;\quad a_{12}=a_{13}=0 \;;\quad a_{14} = -\alpha v = -a_{11} v$$

e portanto pode ser reescrita, como

$$x' = a_{11}(x-vt) \qquad (1.35)$$

Por fim é necessário determinar os três coeficientes a_{11}, a_{41} e a_{44}, presentes nas equações de transformação (1.34) e (1.35). Isso pode ser feito a partir do 2º postulado de Einstein. Suponha que em $t=0$, uma onda eletromagnética esférica seja emitida da origem de S, coincidente com a origem de S', naquele instante. A onda se propaga em todas as direções com velocidade c em ambos os referenciais. A frente de onda é descrita pela equação de uma esfera cujo raio se expande no tempo com velocidade c, de modo que, em cada referencial:

$$x^2+y^2+z^2 = c^2t^2 \qquad (1.36)$$

e,

$$x'^2+y'^2+z'^2 = c^2t'^2 \qquad (1.37)$$

Substituindo-se as eqs. (1.33), (1.34) e (1.35) na eq. (1.37), obtém-se:

$$a_{11}^2(x-vt)^2+y^2+z^2=c^2(a_{41}x+a_{44}t)^2$$

ou,

$$a_{11}^2(x^2-2xvt+v^2t^2)+y^2+z^2=c^2(a_{41}^2x^2+2a_{41}a_{44}xt+a_{44}^2t^2)$$

ou ainda,

$$(a_{11}^2-c^2a_{41}^2)x^2+y^2+z^2-2(va_{11}^2+c^2a_{41}a_{44})xt=(c^2a_{44}^2-v^2a_{11}^2)t^2$$

Comparando-se esta equação com a eq. (1.36), conclue-se que

$$a_{11}^2-c^2a_{41}^2=1$$
$$va_{11}^2+c^2a_{41}a_{44}=0$$
$$c^2a_{44}^2-v^2a_{11}^2=c^2$$

Tem-se aqui um problema de três equações com três incógnitas identificadas pelos coeficientes a_{11}, a_{41} e a_{44}. Pode-se verificar, por substituição nas três equações acima, que as soluções são:

$$a_{44}=1/\sqrt{1-v^2/c^2}$$

$$a_{11}=1/\sqrt{1-v^2/c^2} \qquad (1.38)$$

$$a_{41}=-\frac{v}{c^2}\Big/\sqrt{1-v^2/c^2}$$

Substituindo-se esses coeficientes nas eqs. (1.34) e (1.35), obtém-se as <u>equações de transformação de Lorentz</u>:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad ; \; y' = y \; ; \; z' = z \; ; \quad t' = \frac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (1.39)$$

onde $\beta = v/c$. Se as coordenadas do espaço-tempo de um evento fosse observadas do referencial S', ao invés de S, a única mudança permitida pelo princípio da Relatividade seria à variação física da velocidade relativa de v para $-v$. Assim, trocando-se x por x', y por y', z por z', t por t' e v por $-v$ nas eqs. (1.39), obtém-se as <u>transformações de Lorentz inversa</u>:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad ; \; y = y' \; ; \; z = z' \; ; \quad t = \frac{t' + (v/c^2)x'}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (1.40)$$

Deve-se notar que as <u>transformações de Lorentz</u> da eq. (1.39) se reduzem nas <u>transformações de Galileu</u> quando $\beta = v/c \ll 1$, ou $v/c^2 \sim 0$.

Considere dois pontos x_1' e x_2' ao longo do eixo x' no referencial S'. De acordo com a primeira eq. (1.39),

$$x_1' = \frac{x_1 - vt_1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad ; \quad x_2' = \frac{x_2 - vt_2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

tal que, a distância entre os pontos, é

$$x_2' - x_1' = \frac{(x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1)}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (1.41)$$

O comprimento $x_2 - x_1$, visto do referencial S, é medido <u>simultaneamente</u> ($t_1 = t_2$) entre os pontos em movimento x_1 e x_2, de modo que

$$x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma(x_2 - x_1)$$

ou,

$$x_2 - x_1 = 1/\gamma\,(x_2' - x_1') \qquad (1.42)$$

de modo que o comprimento em movimento $x_2 - x_1$ <u>contrai-se pelo fator</u> $1/\gamma = \sqrt{1-\beta^2}$ com relação a seu comprimento em repouso, $x_2' - x_1'$. Por outro lado, comprimentos ao longo de y e z, perpendiculares ao movimento relativo, de acordo com as equações de transformação $y' = y$ e $z' = z$, permanecem inalteradas para ambos os referenciais.

Considere agora, um relógio em repouso na posição x' no referencial S'. Se <u>dois eventos</u> ocorrem nos instantes t_1 e t_2, num mesmo local x', no referencial S', do ponto de vista do referencial S, tem-se

$$t_1 = \frac{t_1' + (v/c^2)x'}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad ; \quad t_2 = \frac{t_2' + (v/c^2)x'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

O relógio no referencial S' está numa posição fixa x', mas os instantes t_1 e t_2 são lidos por dois relógios diferentes sincronizados no referencial S, como mostra a fig. 1.14, uma vez que os eventos ocorrem no ponto x' em movimento.

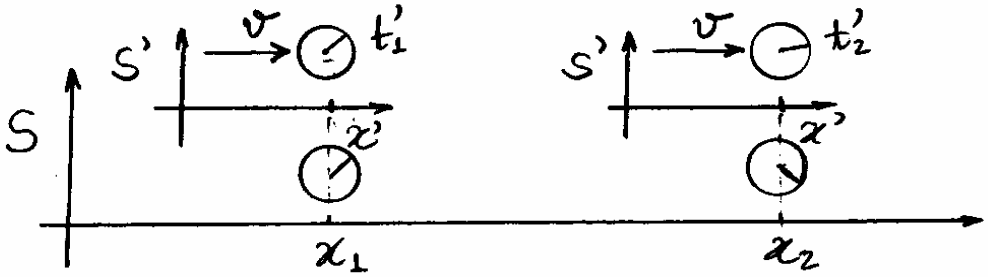


fig. 1.14 – Eventos ocorrendo em x' no referencial S' do ponto de vista dos referenciais S e S'.

De acordo com as equações anteriores, o intervalo de tempo $t_2 - t_1$ de ocorrência dos eventos, do ponto de vista do referencial S, em termos do intervalo de tempo $t_2' - t_1'$, será

$$t_2 - t_1 = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma(t_2' - t_1') \qquad (1.43)$$

Assim, do ponto de vista do observador em S, o intervalo de tempo fica <u>dilatado</u> por um fator $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ em relação ao intervalo de tempo medido em S'.

É comum identificar o referencial em que o <u>objeto observado está em repouso</u>, como sendo o <u>referencial próprio</u>. Um comprimento do objeto em tal referencial é chamado de <u>comprimento próprio</u>. Similarmente, o <u>tempo próprio</u> é o intervalo de tempo <u>ligado ao objeto observado</u>. Em outras palavras, o tempo próprio é o intervalo de tempo entre dois eventos que <u>ocorrem no mesmo local</u>, ou <u>medido por um único relógio</u>. Dessa discussão e das eq. (1.42) e (1.43), se T_p e L_p são o tempo e o comprimento próprio respectivamente, então

$$L = \frac{1}{\gamma} L_p \quad ; \quad T = \gamma T_p \qquad (1.44)$$

estabelecem essas grandezas do ponto de vista de um <u>referencial impróprio</u> S.

Um outro aspecto importante das equações de transformação é que, embora relógios colocados em diferentes posições no referencial S' avancem numa razão lenta, quando observados de S em relação ao qual os relógios se movem, eles se encontram <u>dessincronizados</u>. Isso pode ser verificado tomando-se um <u>instante de tempo t fixo em S</u>. Para que a equação de transformação

$$t = \frac{t' + (v/c^2)x'}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (1.45)$$

seja satisfeita <u>o termo</u> $t' + (v/c^2)x'$ <u>também deve ser fixo</u>. Assim, quanto <u>maior o valor de x'</u> menor será o valor de t', isto é, mais atrasada estará suas leituras. Conclue-se então que, os relógios colocados em diferentes pontos x' estarão <u>dessincronizados</u> por uma <u>diferença de fase</u> vx'/c^2. Para se entender o significado físico dessa diferença de fase, seja <u>dois relógios A e B sincronizados</u> e separados pela distância L' no referencial S'. Liga-se uma lâmpada, que se acha exatamente no meio caminho entre os dois relógios, e instrui-se os observadores na posição dos relógios a acerta-los para t'=0, quando a luz os atingir.

Este é um procedimento combinado para sincronizar os dois relógios separados, e é representado na fig. 1.15(a). Deseja-se verificar esse processo de sincronização sob o ponto de vista de <u>um observador</u> no referencial S, em relação a quem os relógios A e B se movem para a direita com velocidade v, como representado na fig. 1.15(b).

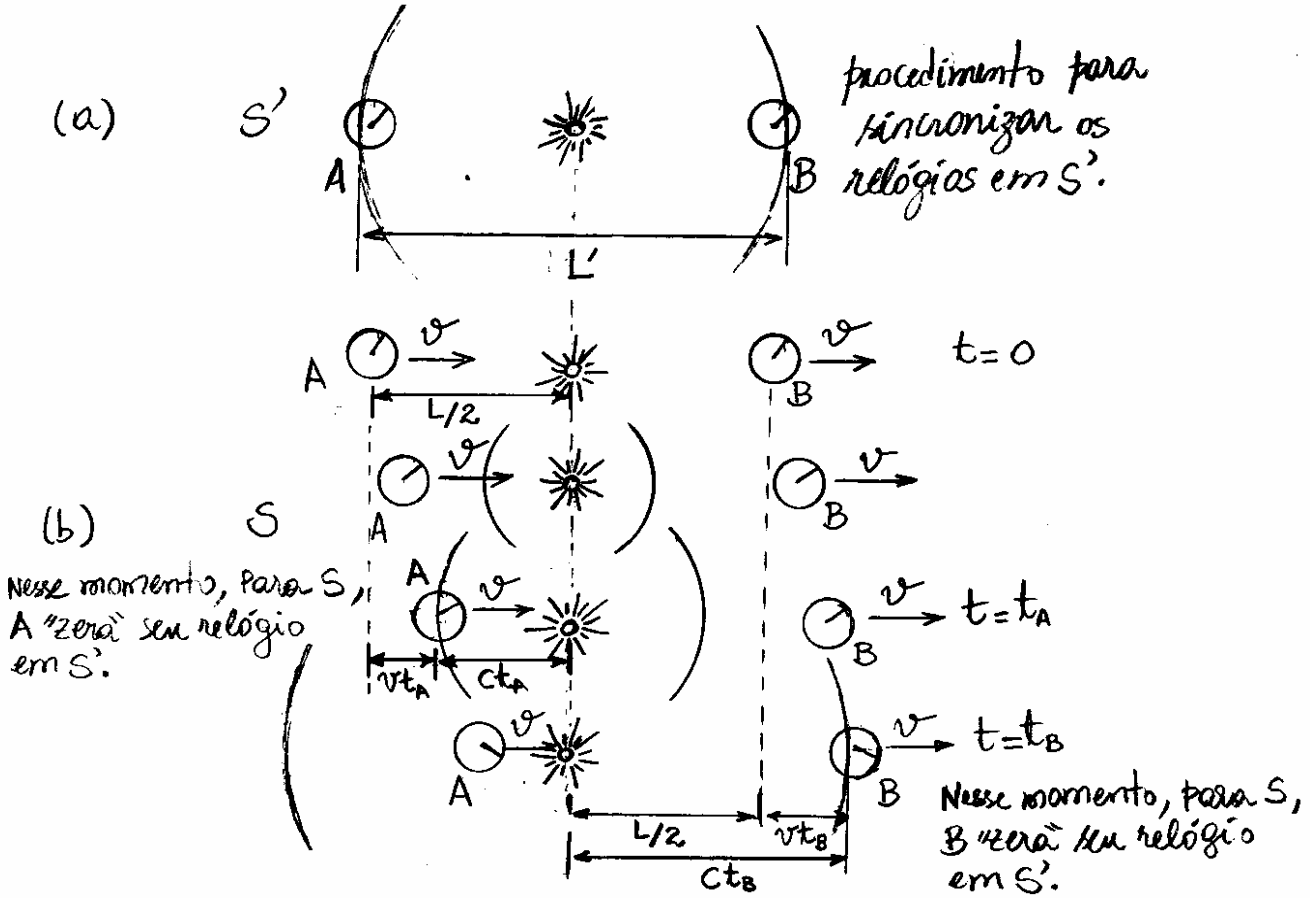


fig. 1.15 – Luz enviada do ponto médio entre os relógios A e B, (a) em repouso em S' e, (b) em movimento do ponto de vista de S.

Para o observador S, a separação dos relógios, será

$$L = \frac{1}{\gamma} L' = L' \sqrt{1 - v^2/c^2} \qquad (1.46)$$

Esse observador percebe as seguintes sequências de eventos:

- Após acionado a fonte no ponto médio, as frentes de onda se propagam em todas as direções com velocidade c, enquanto que os relógios movem-se para a direita com velocidade v.
- O relógio A intercepta a luz antes de B e, para o observador em S, o observador A em S', acerta seu relógio para $t' = 0$ (3ª figura na sequência).
- Agora o relógio B intercepta a luz e, para o observador em S, o observador B em S', acerta seu relógio para $t' = 0$ (4ª figura da sequência).

Assim, de acordo com o observador em S, A acerta seu relógio para $t' = 0$ antes que B o faça e, para ele, os relógios <u>não estarão sincronizados</u>.

Deseja-se determinar a <u>diferença de sincronia</u> entre os <u>relógios em S'</u>, de acordo com o <u>observador em S</u>.

Seja $t = 0$ o instante em que o observador em S percebe a luz gerada na fonte. Então, quando a frente de onda encontra o relógio A, em $t = t_A$, tem-se

$$c t_A = \frac{L}{2} - v t_A = \frac{1}{2} L' \sqrt{1 - v^2/c^2} - v t_A$$

Mais tarde, quando a frente de onda encontra o relógio B, no instante $t = t_B$, tem-se

$$ct_B = \frac{L}{2} + vt_B = \frac{L'}{2}\sqrt{1 - v^2/c^2} + vt_B$$

Portanto, quando medido pelo observador em S, o intervalo de tempo entre o acerto dos relógios, será

$$\Delta t = t_B - t_A = \frac{(L'/2)\sqrt{1-v^2/c^2}}{c-v} - \frac{(L'/2)\sqrt{1-v^2/c^2}}{c+v}$$

$$= \frac{L'}{2}\sqrt{1-v^2/c^2}\left(\frac{1}{c-v} - \frac{1}{c+v}\right) = \frac{L'}{2}\sqrt{1-v^2/c^2}\left(\frac{c+v-c+v}{c^2-v^2}\right)$$

ou,

$$\Delta t = \frac{L'v\sqrt{1-v^2/c^2}}{c^2-v^2}$$

Assim, para o observador em S, os relógios estarão <u>dessincronizados em</u> S', por um fator

$$\Delta t' = \Delta t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{L'v}{c^2-v^2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{L'v}{\cancel{c^2-v^2}}\left(\frac{\cancel{c^2-v^2}}{c^2}\right)$$

ou,

$$\Delta t' = \frac{L'v}{c^2} \qquad (1.47)$$

Note que quanto maior a separação L' dos relógios no referencial S', mais atrasado será a leitura do relógio B, do ponto de vista de um observador em S. Isso está de acordo com a transformação de Lorentz para o tempo, dada pela eq. (1.45).

Exemplo 1.2

Se um avião voa a 2000 km/h, quanto tempo deve voar para que o relógio de bordo se atrase 1 s em virtude da dilatação do tempo?

Os relógios no avião e na terra estarão dessincronizados, por

$$\Delta T = \Delta t - \Delta t' = 1\,s$$

Para se determinar o intervalo de tempo Δt no referencial da terra para que isso ocorra, deve-se levar em conta a dilatação do tempo,

$$\Delta t = \gamma \Delta t' \Rightarrow \Delta t' = 1/\gamma\, \Delta t$$

Assim, a equação anterior, torna-se

$$\Delta t - 1/\gamma\, \Delta t = 1\,s \Rightarrow \Delta t = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)^{-1} s$$

Da expansão binomial $(1+x)^n \simeq 1 + nx$ para $x \ll 1$, tem-se

$$\frac{1}{\gamma} = \left(1 - \beta^2\right)^{1/2} \simeq 1 - \frac{1}{2}\beta^2$$

uma vez que $\beta = v/c \ll 1$. Logo,

$$\Delta t = \left[1 - \left(1 - \frac{1}{2}\beta^2\right)\right]^{-1} s = \left(\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1} s = 2\,\frac{c^2}{v^2}\, s$$

Assumindo-se $c = 3\times10^8$ m/s e, $v = 2000$ km/h $\simeq 555$ m/s, obtém-se

$$\Delta t = 5{,}83\times10^{11}\,s$$

ou,

$$\boxed{\Delta t \simeq 18456 \text{ anos}}$$

1.8.3 - Transformação de Velocidades.

Seja um trem se movendo com velocidade $\vec{v}$ em relação ao solo. Se um passageiro se move com uma velocidade $\vec{u}'$ em relação ao trem, de acordo com a física clássica, a velocidade $\vec{u}$ do passageiro em relação ao solo, seria dada por

$$\vec{u} = \vec{u}' + \vec{v} \qquad (1.48)$$

Considere-se S o referencial do solo, S' o referencial do trem, e que todas as velocidades estejam na direção do eixo comum x e x'. Então, de acordo com a transformação de Lorentz (eq. 1.39), a posição x' e o tempo t' do passageiro no trem, serão

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}} = u'_x t' \quad ; \quad t' = \frac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Com $\beta = v/c$. Combinando estas equações, obtém-se

$$x - vt = u'_x\left[\frac{t-(v/c^2)x}{\sqrt{1-\beta^2}}\right]\sqrt{1-\beta^2} = u'_x\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

ou,

$$x = u'_x t - \frac{u'_x v}{c^2}x + vt \Rightarrow x\left(1+\frac{u'_x v}{c^2}\right) = (u'_x + v)t$$

ou, ainda

$$x = \frac{(u'_x+v)}{1+u'_x v/c^2}t \qquad (1.49)$$

Se u_x é a velocidade do passageiro em relação ao solo, então sua localização no solo, à medida que o tempo passa é dada, por $x = u_x t$. Comparando-se esta equação com a eq. (1.49), obtém-se

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1+u'_x v/c^2} \qquad (1.50)$$

cuja transformação inversa, será

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - u_x v/c^2} \qquad (1.51)$$

Se u'_x e $v \ll c$, a eq. (1.50) se reduz ao resultado clássico dado na eq. (1.48), com $u_x = u'_x + v$. Por outro lado se $u'_x = c$, caso em que o "passageiro" é um pulso luminoso, a eq. (1.50) fornece

$$u_x = \frac{c+v}{1+c\,v/c^2} = \frac{c+v}{c(c+v)}c^2 = c \qquad (1.52)$$

em concordância com o postulado 2 de Einstein.

Exemplo 1.3

Resolver o exemplo 1.1 utilizando o formalismo da teoria de Relatividade Especial. Nesse exemplo dois prótons são ejetados de um núcleo atômico radioativo em direções opóstas, numa amostra de material radioátivo em repouso no laboratório. Cada próton tem velocidade de 0,95c, quando medida por um observador no laboratório. Pede-se a velocidade de um próton quando medido pelo outro.

Como naquele exemplo, um dos prótons deve ser o referencial fixo S, o laboratório deve ser o referencial móvel S' e o outro próton como o objeto, cuja velocidade no referencial S se procura, veja a fig. 1.16.

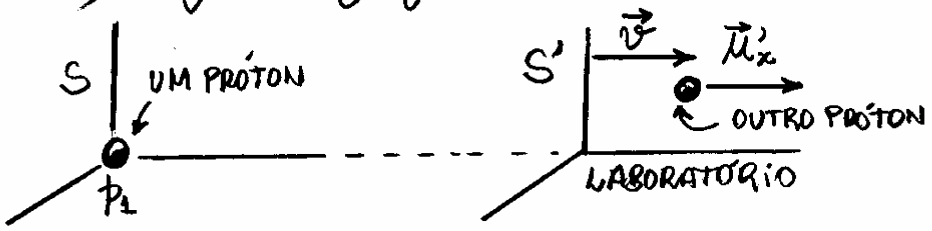


fig. 1.16 – Movimento de um próton do ponto de vista do outro próton.

Nesse caso, $u'_x = 0,95c$ e $v = 0,95c$, e a eq. (1.50) resulta, em

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + u'_x v/c^2} = \frac{0,95c + 0,95c}{1 + (0,95)^2} = \frac{1,9c}{1,9025} \simeq 0,9987c$$

valor menor que a velocidade c.

A transformação relativística de velocidades deve conduzir ao coeficiente de Fresnel. Nesse caso, v_w é a velocidade da água em relação ao aparelho e c/n é a velocidade da luz relativa à água, isto é, na eq. (1.50) deve-se adotar,

$$u'_x = c/n \quad e \quad v = v_w$$

Então, a velocidade da luz em relação ao aparelho, torna-se

$$u_x = \frac{c/n + v_w}{1 + v_w/nc} = \left(\frac{c}{n} + v_w\right)\left(1 + \frac{v_w}{nc}\right)^{-1}$$

Pode-se usar a aproximação da expansão binomial $(1+x)^n \simeq 1 + nx$ para $x \ll 1$, uma vez que $v_w/nc \ll 1$ no caso em questão, de modo que

$$u_x \simeq \left(\frac{c}{n} + v_w\right)\left(1 - \frac{v_w}{nc}\right) = \frac{c}{n} - \frac{v_w}{n^2} + v_w - \cancel{\frac{v_w^2}{nc}}^{\sim 0}$$

$$\simeq \frac{c}{n} + v_w - \frac{v_w}{n^2}$$

ou,

$$u_x \simeq \frac{c}{n} + v_w\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \qquad (1.53)$$

Observe-se que não há a necessidade de se admitir nenhum mecanismo de "arrastamento", ou inventar teorias de interação entre a matéria e o "éter". O resultado é uma consequência inevitável da transformação relativística de velocidades.

É interessante citar aqui que é possível haver velocidades maiores que c. Essa restrição é uma prerrogativa apenas para a matéria ou para a energia (sinais). Certos processos cinemáticos, não material e não energético, podem ter velocidades super-luminosas. Por exemplo, a sucessão dos pontos de intersecção das lâminas de uma tesoura gigante, quando esta é rapidamente fechada, pode ser gerada a uma velocidade superior a c. Aqui pontos geométricos estão envolvidos num movimento ilusório, enquanto que partículas das lâminas se movem com velocidade inferior a c. Outros exemplos similares são as sucessões de pontos numa tela de televisão, quando um feixe de elétrons varre a tela, ou o feixe de luz de um holofote varre as nuvens no céu. Os elétrons ou os fótons de luz, que transportam a energia, movem-se com velocidades que não excedem c.

Seja agora considerar as transformações de velocidades para os casos nos quais se tenham componentes de velocidade perpendiculares à direção do movimento. Se y_1' e y_2' são as componentes y das posições de uma partícula nos instantes t_1' e t_2', respectivamente, então a componente y da velocidade em S', será

$$u_y' = \frac{\Delta y'}{\Delta t'} = \frac{y_2' - y_1'}{t_2' - t_1'}$$

Para se determinar a componente y da velocidade em S, usa-se as equações de transformação de Lorentz:

$$t_1' = \frac{t_1 - (v/c^2)x_1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad ; \quad t_2' = \frac{t_2 - (v/c^2)x_2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$t_2' - t_1' = \frac{t_2 - t_1 - (x_2 - x_1)v/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \Rightarrow \Delta t' = \frac{\Delta t - \Delta x v/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

ou, como $\Delta y' = \Delta y$, então

$$u_y' = \frac{\Delta y'}{\Delta t'} = \frac{\Delta y}{\Delta t'} = \frac{\Delta y\sqrt{1-v^2/c^2}}{\Delta t - \Delta x v/c^2} = \frac{\Delta y\left(\sqrt{1-v^2/c^2}\right)/\Delta t}{(\Delta t - \Delta x v/c^2)/\Delta t} = \frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}\sqrt{1-v^2/c^2}}{1-\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)\frac{v}{c^2}}$$

ou ainda,

$$u_y' = \frac{u_y\sqrt{1-v^2/c^2}}{1 - u_x v/c^2} \qquad (1.54)$$

uma vez que, $u_y = \Delta y/\Delta t$ e $u_x = \Delta x/\Delta t$.

Similarmente, mostra-se que

$$u_z' = \frac{u_z\sqrt{1-v^2/c^2}}{1 - u_x v/c^2} \qquad (1.55)$$

As transformações inversas das eqs. (1.54) e (1.55), serão

$$u_y = \frac{u_y'\sqrt{1-v^2/c^2}}{1 + u_x' v/c^2} \quad ; \quad u_z = \frac{u_z'\sqrt{1-v^2/c^2}}{1 + u_x' v/c^2} \qquad (1.56)$$

Note-se que as componentes perpendiculares ou transversais da velocidade de um objeto (u_y e u_z) vistas em S, estão relacionados, tanto às componentes transversais (u_y' e u_z'), como à componente paralela (u_x') da velocidade do objeto em S'. O resultado não é tão simples porque <u>nenhum dos observadores é próprio</u>. Entretanto, se for escolhido um referencial em que $u_x' = 0$, então os resultados transversais, tornar-se-iam

$$u_z = u_z' \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad \text{e} \quad u_y = u_y' \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

Então, apesar de <u>nenhuma contração de comprimento</u> ocorrer nas <u>direções transversais</u>, o mesmo não se observa com as velocidades. O fator de contração $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ aparece nesse caso, pois a velocidade é uma razão entre intervalos de comprimento e tempo, e a <u>dilatação do tempo está envolvida</u>.

É possível obter também equações relativísticas de transformação da aceleração, simplesmente derivando-se no tempo as equações de transformação da velocidade. Por exemplo, as componentes x e x' da aceleração se transformam por,

$$a_x' = \frac{a_x}{\gamma^3 (1 - u_x v/c^2)^3} \tag{1.57}$$

com $a_x = du_x/dt$ e $a_x' = du_x'/dt'$. Equações similares podem ser encontradas para a_y', a_z' e a_y, a_z

Os aspectos mais importantes a se notar aqui são:

1 - A aceleração de uma partícula depende do referencial inercial, no qual é medida em contradição com o resultado Galileiano, segundo o qual $a'_x = a_x$.

2 - O resultado relativístico se reduz ao clássico quando u_x e $v \ll c$, isto é, $a'_x \to a_x$ quando u_x/c e $v/c \to 0$.

Deve-se enfatizar aqui que, embora na relatividade especial os referenciais sejam inerciais, os objetos cujos movimentos se estuda, podem estar acelerados em relação a tais sistemas.

1.8.4 - Efeito Doppler na Relatividade

Considere dois trens de ondas luminosas, planas e monocromáticas de amplitudes unitária, emitidas por duas fontes, colocadas nas origens dos referenciais S e S', coincidentes em $t=0$. A fig. 1.17, mostra a situação após um instante de tempo t.

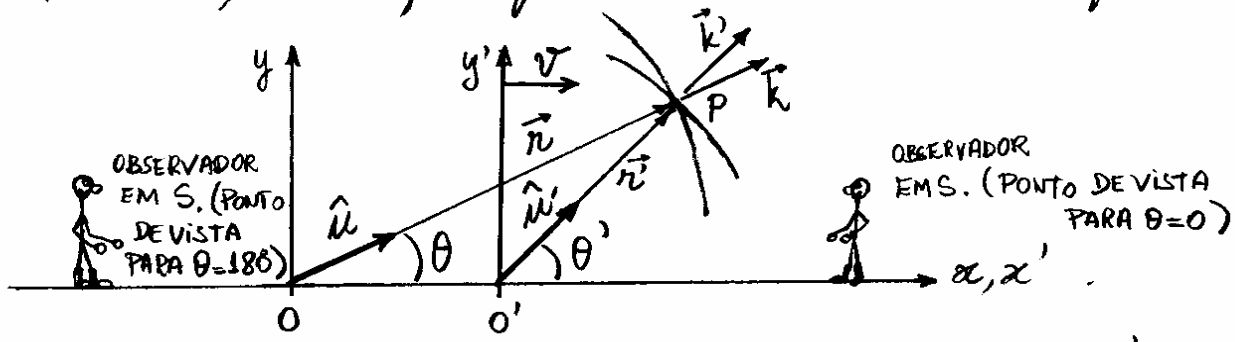


fig. 1.17 - Trens de onda luminosos emitidas de S e S'.

Os raios luminosos, são escolhidos de modo a pertencer aos planos xy e $x'y'$, formando ângulos θ com o eixo x e θ' com o eixo x'. Uma equação que descreve a propagação da onda em S, seria

$$\exp\left[i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)\right]=\exp\left[-i\omega\left(t-\frac{\vec{k}.\vec{r}}{\omega}\right)\right]=\exp\left[-i2\pi\nu\left(t-\frac{\vec{k}.\vec{r}}{2\pi\nu}\right)\right]=$$

$$\exp\left[-2\pi i\nu\left(t-\frac{2\pi/\lambda\,\hat{u}.\vec{r}}{2\pi\nu}\right)\right]=\exp\left[-2\pi i\nu\left(t-\frac{\hat{u}.\vec{r}}{\lambda\nu}\right)\right]=$$

$$\exp\left[-2\pi i\nu\left(t-\frac{\hat{u}.\vec{r}}{c}\right)\right]=\exp\left(-2\pi i F\right)$$

onde,

$$F=\nu\left(t-\frac{\hat{u}.\vec{r}}{c}\right) \qquad (1.58)$$

onde, adotou-se $\omega=2\pi\nu$, $\vec{k}=k\hat{u}=2\pi/\lambda\,\hat{u}$ e, $c=\lambda\nu$. Para se entende o significado físico da eq. (1.58), deve-se supor que, em $t=0$, a origem O do referencial S seja interceptada por um máximo da onda. Esse máximo deve alcançar o ponto P quando a luz, com velocidade c, percorrer a distância $r=r\cos\theta=\hat{u}.\vec{r}$. O tempo necessário para isso, é

$$t_0=\frac{\hat{u}.\vec{r}}{c} \qquad (1.59)$$

Se t for escolhido de modo que F na eq. (1.58), seja um número inteiro, então

$$F = \nu(t - t_0) \qquad (1.60)$$

será o <u>número de máximos de onda</u> contidos no intervalo de tempo $t - t_0$, pois, da eq. (1.60):

para $F = 1 \Rightarrow t - t_0 = 1/\nu = T \equiv 1$ período
para $F = 2 \Rightarrow t - t_0 = 2/\nu = 2T \equiv 2$ períodos
para $F = 3 \Rightarrow t - t_0 = 3/\nu = 3T \equiv 3$ períodos
$\vdots$
para $F = N \Rightarrow t - t_0 = N/\nu = NT \equiv N$ períodos

Do ponto de vista do referencial S', as eqs. (1.58) e (1.60) devem ser escritas, como

$$F' = \nu'\left(t' - \frac{\hat{u}' \cdot \vec{r}'}{c}\right) = \nu'(t' - t'_0) \qquad (1.61)$$

que dá o número de máximos de onda contidos no intervalo de tempo $t' - t'_0$. <u>Esse número deve ser idêntico a F</u>, pois a primeira e a última frente de onda são correspondentes em ambos os referenciais, uma vez que, a <u>velocidade c</u> da <u>onda eletromagnética</u> é <u>invariante</u> para <u>diferentes referenciais inerciais</u>. Assim, tem-se

$$F = F' \qquad (1.62)$$

De acordo com a fig. 1.17, pode-se escrever

$$\hat{u} = \cos\theta\,\vec{i} + \operatorname{sen}\theta\,\vec{j} \quad ; \quad \hat{u}' = \cos\theta'\,\vec{i} + \operatorname{sen}\theta'\,\vec{j}$$
$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} \quad ; \quad \vec{r}' = x'\vec{i} + y'\vec{j} \qquad (1.63)$$

Logo, das eqs. (1.58) e (1.61), tem-se

$$F' = \nu'\left[t' - \left(\frac{x'}{c}\cos\theta' + \frac{y'}{c}\operatorname{sen}\theta'\right)\right] = \nu' t' - \left(\frac{\nu'}{c}\cos\theta'\right)x' - \left(\frac{\nu'}{c}\operatorname{sen}\theta'\right)y' \quad (1.64)$$

e,

$$F = \nu\left(t - \frac{x}{c}\cos\theta - \frac{y}{c}\operatorname{sen}\theta\right) \quad (1.65)$$

Das transformações de Lorentz, dadas na eq. (1.40), como

$$t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right) \; ; \; x = \gamma\left(x' + vt'\right) \; ; \; y' = y$$

a eq. (1.65), torna-se

$$F = \nu\left[\gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right) - \frac{\gamma}{c}\cos\theta\left(x' + vt'\right) - \frac{y'}{c}\operatorname{sen}\theta\right]$$

ou,

$$F = \gamma\nu\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right)t' - \frac{\gamma\nu}{c}\left(\cos\theta - \frac{v}{c}\right)x' - \frac{\nu}{c}\operatorname{sen}\theta\, y'$$

que comparada com a eq. (1.64), levando-se em conta a eq. (1.62) e o fato que, $\beta = v/c$, fornece

$$\nu' = \gamma\nu\left(1 - \beta\cos\theta\right) \quad (1.66)$$

$$\nu'\cos\theta' = \gamma\nu\left(\cos\theta - \beta\right) \quad (1.67)$$

$$\nu'\operatorname{sen}\theta' = \nu\operatorname{sen}\theta \quad (1.68)$$

As transformações inversas podem ser obtidas trocando β por $-\beta$.

A eq. (1.66) dá a expressão relativística para o <u>Efeito Doppler</u>. Dividindo-se a eq. (1.68) pela eq. (1.67), obtém-se

$$tg\theta' = \frac{sen\theta}{\gamma(\cos\theta - \beta)} \qquad (1.69)$$

com uma transformação inversa obtida trocando-se β por $-\beta$. A eq. (1.69) é a relação relativística para a <u>Aberração da Luz</u>. Ela mostra como as direções de propagação, θ e θ', são vistas de dois diferentes referenciais inerciais. Experiências em Física de Alta Energia confirmam as expressões relativísticas do <u>Efeito Doppler</u> e da <u>Aberração da Luz</u>.

Seja o caso da <u>observação clássica</u> da Aberração de Estrêlas discutida na seção 1.6.2. Tome-se como exemplo uma estrêla no zênite no referencial S, cuja direção de propagação está ao longo da direção $-y$, isto é, $\theta = 270° = 3\pi/2$ rd. No <u>referencial S'</u>, que no caso é <u>a terra em movimento com velocidade v</u>, a direção de propagação é θ' dada pela eq. (1.69), isto é

$$tg\theta' = \frac{sen(3\pi/2)\sqrt{1-\beta^2}}{\cos(3\pi/2) - \beta} = \frac{-\sqrt{1-\beta^2}}{-\beta}$$

Como nesse caso, $v \ll c$, $\beta^2 = v^2/c^2 \sim 0$. Assim, pode-se escrever, $tg\theta' \simeq 1/\beta$, ou, $\theta' = tg^{-1}(1/\beta)$.

A fig. 1.18 mostra que a direção de propagação da luz da estrêla $\theta = 3\pi/2$ em S e $\theta' = tg^{-1}(1/\beta)$ em S', relacionam-se à direção α do telescópio, por $\alpha = \theta - \theta' = 3\pi/2 - tg^{-1}1/\beta$. Por outro lado, sabe-se que $tg^{-1}\beta \simeq 3\pi/2 - tg^{-1}1/\beta$, para $\beta = v/c$ pequeno, que é o caso aqui. Assim, tem-se

$$\alpha \simeq tg^{-1}\beta = tg^{-1}(v/c)$$

que está em perfeito acordo com o efeito de aberração de primeira ordem discutida na seção 1.6.2.

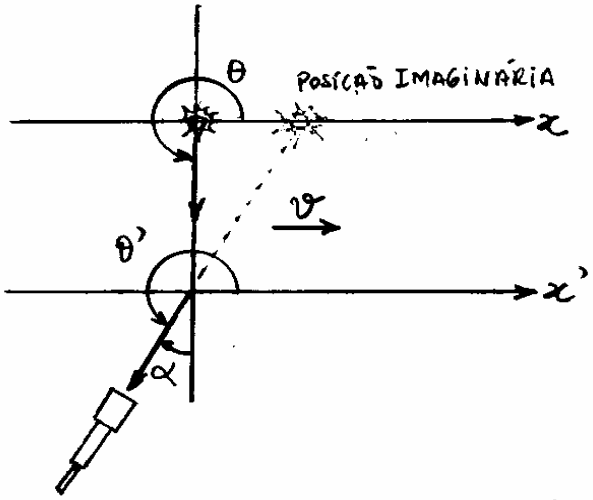


fig. 1.18 – Aberração da luz de uma estrêla devido ao movimento da terra S'.

Este resultado é notável uma vez que qualquer outra teoria tem dificuldades de <u>explicar satisfatoriamente</u> o efeito da Aberração.

Seja agora considerar a questão do Efeito Doppler dado, a partir da eq. (1.66), por

$$\nu' = \gamma\nu(1 - \beta\cos\theta) = \nu\,\frac{1 - \beta\cos\theta}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (1.70)$$

Nesse momento parece evidente que resultados clássicos devem estar sempre associados a termos de primeira ordem em $\beta = v/c$. Para verificar que a fórmula relativística (1.70) se reduz a uma fórmula clássica (com termos de 1ª ordem em β), basta desprezar termos de 2ª ordem $\beta^2 = v^2/c^2$ quando $v \ll c$. Nesse caso, a eq. (1.70), fornece

$$\nu = \nu' \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\theta} \simeq \nu'(1-\beta\cos\theta)^{-1} = \nu'(1+\beta\cos\theta - \beta^2\cos^2\theta + \dots)$$

$$\simeq \nu'(1+\beta\cos\theta) \qquad (1.71)$$

uma vez que, $(1+x)^n = 1+nx+n(n-1)x^2/2+\dots \simeq 1+nx$ para $x \ll 1$. A dependência com o termo $\beta = v/c$, torna-se mais evidente considerando-se casos familiares. Por exemplo, para $\theta = 0$, que corresponde ao observador em S vendo a fonte se aproximar, ou ele se aproximando da fonte, tem-se

$$\nu = \nu'(1+\beta-\beta^2+\dots) \simeq \nu'(1+\beta) = \nu'(1+v/c) \qquad (1.72)$$

que mostra que a frequência ν é ligeiramente maior que a frequência própria ν'. Por outro lado, para $\theta = 180°$, que corresponde ao observador vendo a fonte afastando-se, ou ele se afastando da fonte, tem-se

$$\nu = \nu'(1-\beta+\beta^2-\dots) \simeq \nu'(1-\beta) = \nu'(1-v/c) \qquad (1.73)$$

que mostra que a frequência ν é ligeiramente menor que a frequência própria ν'.

Do ponto de vista relativístico, isto é, quando v não for pequeno quando comparado a c, a eq. (1.70), para o caso $\theta = 0°$, resulta

$$\nu = \nu' \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\theta} = \nu' \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta} = \nu' \frac{\sqrt{(1-\beta)(1+\beta)}}{\sqrt{(1-\beta)^2}}$$

ou,

$$\nu = \nu' \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = \nu' \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \qquad (1.74)$$

Por outro lado, para o caso $\theta = 180°$, resulta

$$\nu = \nu' \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} = \nu' \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \qquad (1.75)$$

Em relatividade, os casos $\theta = 0°$ e $\theta = 180°$, são conhecidos como <u>Efeito Doppler Longitudinal</u>. Estes resultados foram primeiramente verificados experimentalmente, em 1938, por Ives e Stilwell, usando um <u>feixe de átomos excitados de hidrogênio</u>. A experiência foi repetida, em 1961, com maior precisão por Mandelberg e Witten, confirmando definitivamente o efeito relativístico.

O caso $\theta = 90°$ é conhecido como <u>Efeito Doppler Transversal</u>. Note na eq. (1.71), que o efeito Doppler transversal <u>não está presente na Física clássica</u>. Esse é um efeito puramente relativístico e pode ser obtido da eq. (1.70), isto é:

$$\nu = \nu' \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\theta} = \nu' \sqrt{1-\beta^2} \qquad (1.76)$$

Assim, se a observação fosse na direção $\theta = 90°$ em relação ao movimento relativo, a frequência ν seria inferior a frequência própria ν' da fonte. Esse efeito foi também confirmado experimentalmente por Ives e Stilwell em 1938. Uma observação direta foi feita por W. Kundig em 1963, usando raios γ de uma fonte radioativa colocada numa centrífuga em alta rotação.

Quando se compara o espectro da luz oriunda de uma galáxia distante, onde se identifica linhas de absorção características, com as mesmas linhas num espectro terrestre, observa-se que os comprimentos de onda na luz oriunda da galáxia são desviados para o vermelho ($\nu' < \nu$). Em 1929, o astrônomo Edwin P. Hubble sugeriu que esse desvio seja devido ao efeito Doppler, com a galáxia observada se afastando da terra com um certo valor de β, determinado da eq. (1.75) a partir de ν'/ν. A aplicação da sugestão de Hubble a várias galáxias mostrou que a velocidade v é proporcional à distância r da galáxia à Terra:

$$v = H_0 r \qquad (1.77)$$

onde H_0 é denominado de constante de Hubble. O valor de H_0 é difícil de se determinar com precisão, por causa de incertezas na escala de distâncias muito longas.

O valor da constante de Hubble está entre 50 km/s e 100 km/s para cada Mpc (Mega parsec), onde 1 pc ≃ 3,6 anos-luz. O anos-luz é uma unidade de comprimento astronômica, e corresponde a distância percorrida pela luz durante 1 ano, isto é:

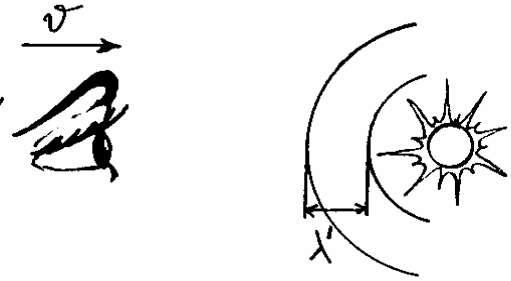
$$1 \text{ ano-luz} = 1 \text{ c ano} = 9{,}461 \times 10^{15} \text{ m}$$

O resultado de Hubble foi a primeira evidência de que o universo <u>encontra-se em expansão</u>.

<u>Exemplo 1.4</u>

A que velocidade você deve se aproximar de uma luz vermelha ($\lambda = 650$ nm) para que ela pareça verde ($\lambda = 525$ nm)?

A frequência de aproximação, é



$$\nu = \nu' \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \Rightarrow \lambda = \lambda' \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}$$

pois, $\nu = c/\lambda$ e $\nu' = c/\lambda'$.

$$\lambda^2 = \lambda'^2 \frac{c-v}{c+v} \Rightarrow (c+v)\lambda^2 = (c-v)\lambda'^2$$

$$v\lambda^2 + v\lambda'^2 = c\lambda'^2 - c\lambda^2 \Rightarrow v = \frac{\lambda'^2 - \lambda^2}{\lambda'^2 + \lambda^2} c$$

$$v = \frac{650^2 - 525^2}{650^2 + 525^2} c \Rightarrow \boxed{v = 0{,}21\, c}$$

1.8.5 - Diagramas Espaço-Tempo

Do fato de que na mecânica relativística os intervalos de tempo não são os mesmos em diferentes referenciais inerciais, destaca o caráter quadridimensional do espaço-tempo. Para se destacar eventos e não simplesmente sistema de coordenadas espaciais, em relatividade especial se utiliza uma representação denominada diagrama espaço-tempo. Nesses diagramas é possível representar as coordenadas espaciais e temporais de vários eventos em um ou mais referenciais inerciais. Como se pode representar apenas duas dimensões no papel, é necessário ignorar duas dimensões espaciais, tais como y e z. Na verdade isso não restringe a análise do movimento, uma vez que, todas as mudanças relevantes ocorrem sempre na direção do eixo x.

Nos diagramas espaço-tempo, as posições dos eventos são representados no eixo horizontal, denominado de eixo x, e os instantes em que ocorrem os eventos são representados no eixo vertical, denominado eixo ct, como ilustra a fig. 1.19.

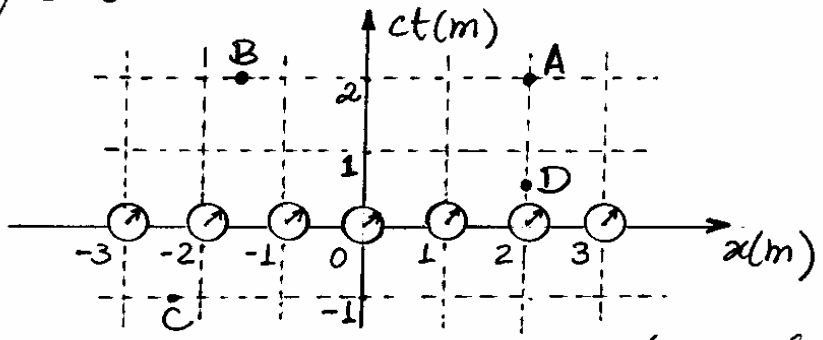


fig. 1.19 - Diagrama espaço-tempo para um referencial inercial S.

Note que, como eventos exibem efeitos relativísticos em altas velocidades, é conveniente multiplicar a escala de tempos pela velocidade da luz (uma constante). Isso permite que se use a mesma escala e as mesmas unidades no eixos espacial e temporal (metros de distância e metros percorridos pela luz). Na fig. 1.19, os relógios podem se mover verticalmente ao longo das linhas tracejadas, a medida que o tempo passa. Assim, quando eventos A, B, C e D ocorrem no espaço-tempo, existe sempre um relógio nas proximidades para registrá-los com um tempo próprio. Na figura, os eventos A e D ocorrem no mesmo local ($x = 2m$), embora em instantes diferentes. Assim, o intervalo de tempo entre esses eventos é um intervalo de tempo próprio. Por outro lado, os eventos A e B ocorrem em locais diferentes, mas ao mesmo tempo (simultaneamente) neste referencial. A distância entre esses eventos define um comprimento próprio. O evento C ocorreu no passado, uma vez que $ct = -1m$, e o presente corresponde a $ct = 0$.

O lugar geométrico das posições ocupadas por uma partícula no diagrama espaço-tempo, é denominado de linha do universo da partícula. A linha do universo é então a "trajetória" de uma partícula em um gráfico $ct \times x$.

A fig. 1.20(a) mostra relógios sincronizados colocados em diferentes pontos do eixo x. Nessa figura mostra-se ainda trajetórias espaciais de 05 partículas,

todas iniciando em $x=0$ e se movendo com diferentes velocidades durante um tempo $ct=3m$. A partícula P_1 tem velocidade nula. As partículas P_2 e P_3 movem-se com velocidades constantes em sentidos opostos ao longo do eixo x. A partícula P_4 move-se para a direita com aumento de velocidade e a partícula P_5 move-se para a esquerda com redução de velocidade. A fig. 1.20(b) mostra as linhas do universo das mesmas partículas no espaço-tempo.

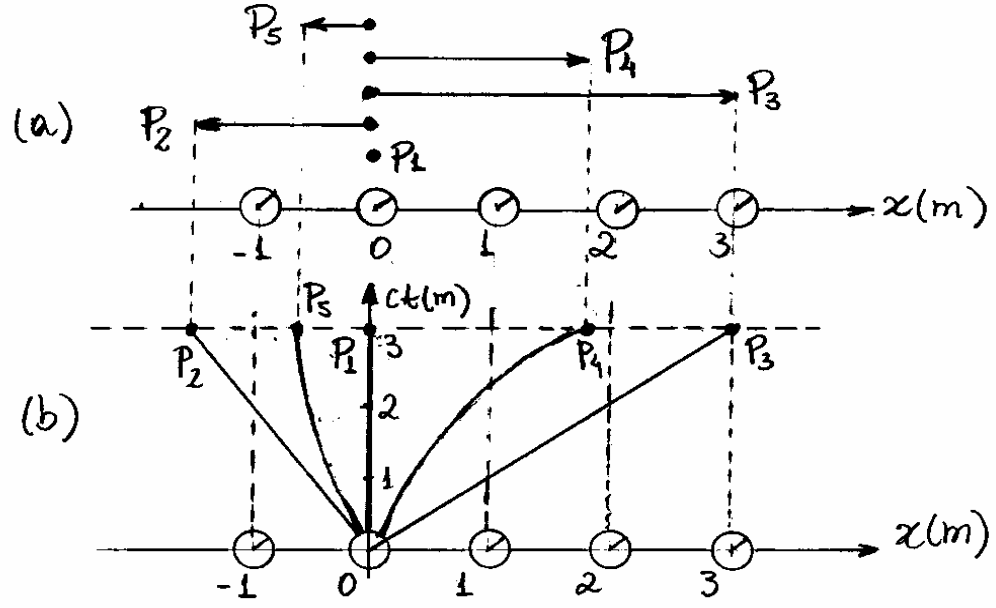


fig. 1.20 - (a) Trajetórias no espaço de as partículas e, (b) Linhas do universo para essas mesmas partículas.

Como as 03 primeiras partículas movem-se com velocidade constante, suas linhas do universo tem inclinação constante proporcional à velocidade. Por outro lado, por terem velocidades variáveis, as linhas

do universo das duas últimas partículas não são retas.

As velocidades de qualquer uma das partículas podem ser calculadas a partir do diagrama espaço-tempo. Por exemplo, a velocidade da partícula P_3 será calculada notando-se que:

$$\Delta x = 3{,}0 - 0 = 3{,}0\,m$$

e,

$$\Delta(ct) = c\,\Delta t = 3{,}0\,m \Rightarrow \Delta t = 3{,}0/c = 10^{-8}\,s$$

daí,

$$u = \frac{\Delta x}{\Delta t} = 3{,}0 \times 10^{8}\,m/s$$

Logo, a partícula P_3 é, na verdade, um pulso luminoso. A inclinação da sua linha do universo é $\Delta(ct)/\Delta x = 3/3 = 1$. Por outro lado, um pulso luminoso que se propaga para a esquerda tem uma linha do universo de inclinação -1. Ver-se-á posteriormente, que nenhuma partícula pode ter velocidade maior do que a da luz. Assim, as inclinações das linhas do universo de todas as partículas que passam por $x=0$ e $ct=0$ estarão limitadas ao triângulo hachurado maior da fig. 1.21. Esses mesmos limites se aplicam a todos os pontos da linha do universo de uma partícula, tal como o ponto A da linha do universo que aparece na fig. 1.21.

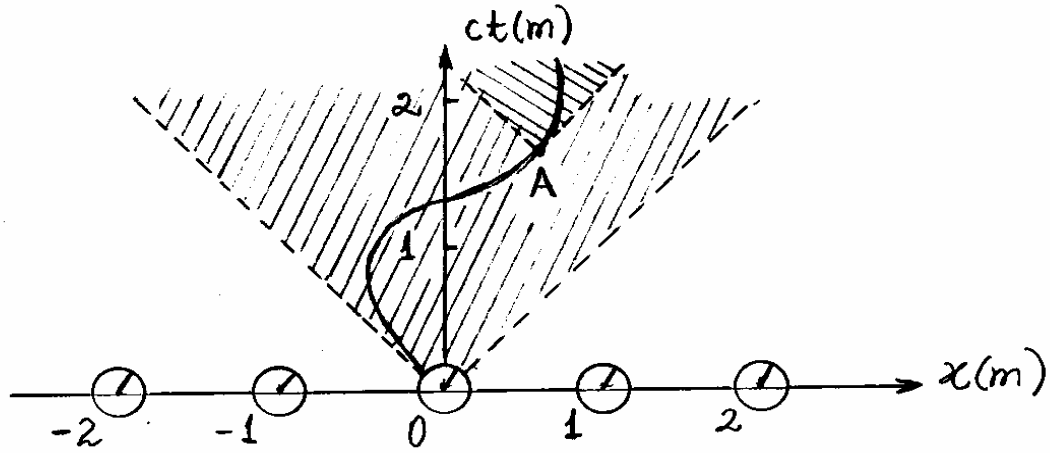


fig. 1.21 – Regiões de delimitação das inclinações da linhas do universo das partículas.

Os referenciais inerciais S e S', com S' se movendo para a direita com velocidade constante v em relação a S, podem ser representados em termos de diagramas espaço-tempo. Os relógios dos dois referenciais estão superpostos no presente ($t=t'=0$). Nesse momento, as duas origens ($x=0$ e $x'=0$) coincidem e todos os relógios de cada referencial estão sincronizados entre si.

A linha do universo da origem de S', que se move com velocidade v ao longo do eixo x em S, é o eixo ct', já que este eixo é o lugar geométrico dos pontos para os quais $x'=0$.

A inclinação do eixo ct', vista por um observador em S, pode ser determinada a partir da transformação de Lorentz para x:

$$x' = \gamma(x - vt) = 0$$

ou,

$$x = vt = \frac{v}{c}\, ct = \beta\, ct$$

e, então

$$ct = 1/\beta\, x \qquad (1.78)$$

o que significa que a linha do universo, identificada pelo eixo ct', é descrita pela equação da reta (1.78) num gráfico $ct \times x$, cuja inclinação é $1/\beta$.

Similarmente, o eixo x' pode ser determinado sabendo-se que este é o lugar geométrico dos pontos para os quais $ct' = 0$. Sua inclinação em S, pode ser determinada a partir da transformação de Lorentz para t:

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) = 0 \Rightarrow t = \frac{v}{c^2}x$$

ou,

$$ct = \frac{v}{c}x = \beta x \qquad (1.79)$$

ou seja, a linha do universo, identificada pelo eixo x', é descrita pela equação da reta (1.79) num gráfico $ct \times x$, cuja inclinação é β.

A fig. 1.22 mostra um diagrama espaço tempo para o referencial S, mostrando um referencial S' que se move com velocidade $v = 1/2\, c$ no sentido positivo do eixo x. Nesse caso,

$$\beta = \frac{v}{c} = 1/2 \quad e \quad 1/\beta = 2$$

A reta tracejada mostra a linha do universo de um pulso luminoso, também no sentido positivo do eixo x, e que passou pelo ponto $x=0$ em $t=0$. Evidentemente, sua inclinação é igual a 1 tanto em S como em S'.

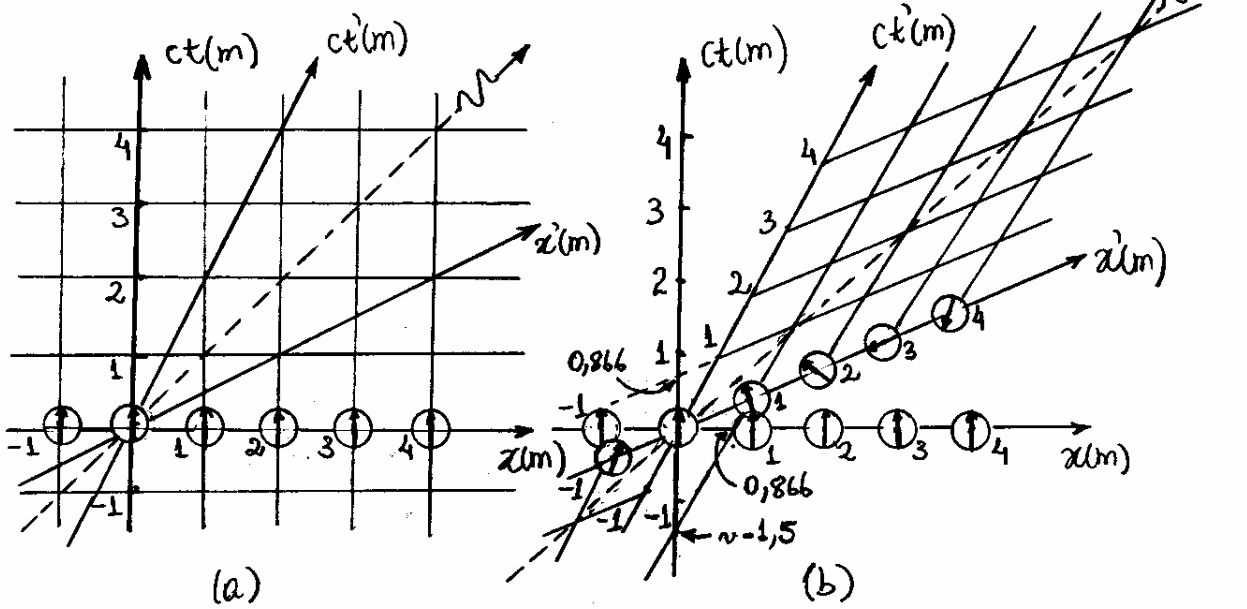


fig. 1.22 - Diagrama Espaço-tempo para os referenciais S e S' do ponto de vista de S.

Não se deve ficar surpreso com o fato de os eixos x e x' não serem paralelos. Eles são paralelos no espaço mas não no espaço-tempo, uma vez que este mostra o movimento tanto no espaço como no tempo. Note-se na fig. 1.22(b), que o relógio em $x'=1$ passou pelo ponto $x=0$ aproximadamente em $ct=-1,5\,m$.

Os eixos dos referenciais S e S' podem ser calibrados a partir das transformações de Lorentz, e as coordenadas de um evento podem ser lidas

diretamente do diagrama espaço-tempo. Essas calibrações podem ser feitas como segue:

As interseções das retas paralelas ao eixo x' em S' com o eixo x em S, podem ser determinadas considerando-se $\underline{ct=0}$ na transformação de Lorentz para x, isto é

$$x' = \gamma(x - vt) = \gamma(x - \beta ct) = \gamma x$$

ou,

$$x = \frac{1}{\gamma} x' = x'\sqrt{1-\beta^2} \qquad (1.80)$$

Por exemplo, na fig. 1.22(b), onde $\beta = 1/2$, a reta $x'=1$ intercepta o eixo x em $x = 1\sqrt{1-1/4} \simeq 0{,}866\,m$.

Similarmente, interseções das retas paralelas ao eixo ct' em S' com o eixo ct em S, são determinadas considerando-se $\underline{x=0}$ na transformação de Lorentz para t, isto é

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \Rightarrow ct' = \gamma(ct - \beta x) = \gamma ct$$

ou,

$$ct = \frac{1}{\gamma} ct' = ct'\sqrt{1-\beta^2} \qquad (1.81)$$

É importante observar na fig. 1.22(b) que os relógios em S' não estão sincronizados do ponto de vista de um observador em S. Além disso, os relógios situados no semi-eixo positivo x' estão atrasados em relação ao relógio da origem, e os relógios situados no semi-eixo negativo x' estão adiantados. Essa é uma consequência direta da transformação de Lorentz $ct' = \gamma(ct - \beta x)$ para $ct = 0$, isto é

$$ct' = -\gamma\beta x \qquad (1.82)$$

Note que, se $x = -1 \Rightarrow ct' = \gamma\beta$ (intervalo positivo - adiantado), e se $x = +1 \Rightarrow ct' = -\gamma\beta$ (intervalo negativo - atrasado).

1.8.6 - Intervalo no Espaço-tempo

A transformação de Lorentz e a relatividade da simultaneidade fazem com que os intervalos de tempo e as distâncias sejam diferentes para observadores situados em diferentes referenciais inerciais. Deve-se investigar agora se existe alguma grandeza associada às coordenadas de espaço e de tempo que seja invariante em relação à transformação de Lorentz. Essa grandeza existe, é denominada de intervalo no espaço-tempo e é definida, como

$$(\Delta s)^2 = (c\,\Delta t)^2 - (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2) \qquad (1.83)$$

ou, para o caso com uma dimensão espacial,

$$(\Delta s)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 \qquad (1.84)$$

que se interpreta, como

(INTERVALO)^2 = (DISTÂNCIA NO TEMPO)^2 − (DISTÂNCIA NO ESPAÇO)^2

O intervalo Δs é a única grandeza que descreve pares de eventos no espaço-tempo para a qual, em qualquer referencial inercial, obtém-se o mesmo valor numérico. Para se verificar isso, sejam o intervalo de tempo e distância definidos pelas transformações de Lorentz:

$$\Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{v\Delta x'}{c^2}\right) \quad ; \quad \Delta x = \gamma(\Delta x' + v\Delta t')$$

Substituindo-se na eq. (1.84), obtém-se

$$(\Delta s)^2 = c^2\gamma^2\left(\Delta t' + \frac{v}{c^2}\Delta x'\right)^2 - \gamma^2(\Delta x' + v\Delta t')^2$$

$$= c^2\gamma^2\left(\Delta t'^2 + 2\Delta t'\frac{v}{c^2}\Delta x' + \frac{v^2}{c^4}\Delta x'^2\right) - \gamma^2(\Delta x'^2 + 2\Delta x' v\Delta t' + v^2\Delta t'^2)$$

$$= c^2\gamma^2\Delta t'^2 + \cancel{2\gamma^2\Delta t' v\Delta x'} + \frac{v^2}{c^2}\gamma^2\Delta x'^2 - \gamma^2\Delta x'^2 - \cancel{2\gamma^2\Delta x' v\Delta t'} - \gamma^2 v^2\Delta t'^2$$

$$= \gamma^2\Delta t'^2 c^2(1 - v^2/c^2) - \gamma^2\Delta x'^2(1 - v^2/c^2)$$

ou, como $1/\gamma^2 = 1 - v^2/c^2$,

$$(\Delta s)^2 = (c\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 = (\Delta s')^2 \qquad (1.85)$$

o que mostra que essa grandeza é, de fato, invariante do ponto de vista de diferentes referenciais inerciais. A eq. (1.84) mostra que o valor $(\Delta s)^2$ pode ser positivo, negativo ou nulo, dependendo dos valores relativos dos intervalos de tempo e espaço. A Fig. 1.23 mostra essas três diferentes condições para $(\Delta s)^2$. O sinal de $(\Delta s)^2$ dá informações sobre a natureza causal entre pares de eventos, que se define:

se, $(\Delta s)^2 > 0$, o intervalo é do tipo temporal.
se, $(\Delta s)^2 < 0$, o intervalo é do tipo espacial.
se, $(\Delta s)^2 = 0$, o intervalo é do tipo luminoso.

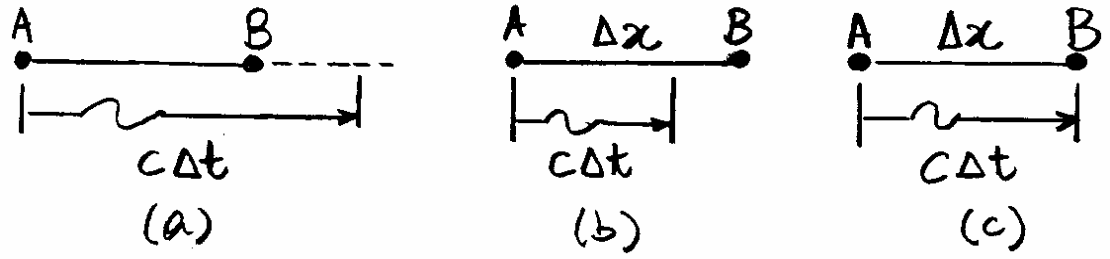


Fig. 1.23 – Dupla de eventos A e B com intervalos do tipo: (a) temporal ($c\Delta t > \Delta x$), (b) espacial ($\Delta x > c\Delta t$) e (c) luminoso ($c\Delta t = \Delta x$).

O <u>intervalo do tipo temporal</u> ($c\Delta t > \Delta x$), está associado à duplas de eventos que podem ocorrer no mesmo local ($\Delta x = 0$) e não podem ser simultâneos ($\Delta t \neq 0$), como se evidencia na Fig. 1.23(a).

Da eq. (1.84) e da definição de tempo próprio $T_p = \Delta t$ para $\Delta x = 0$, tem-se

$$\Delta s/c = \sqrt{(\Delta t)^2 - (\Delta x/c)^2} = \sqrt{T_p^2 - 0} = T_p \qquad (1.86)$$

isto é, o tempo próprio T_p de quaisquer dupla de eventos, de intervalo Δs do tipo temporal, pode ser determinado usando-se medidas de tempos Δt e distâncias Δx executadas em quaisquer referenciais inerciais, uma vez que para esses Δs é invariante.

O <u>intervalo do tipo espacial</u> ($\Delta x > c\Delta t$), está associado a duplas de eventos que não podem ocorrer no mesmo local ($\Delta x \neq 0$) mas podem ser simultâneas ($\Delta t = 0$), como se evidencia na Fig. 1.23(b). Se os eventos são simultâneos ($\Delta t = 0$), Δx define um comprimento próprio L_p, e a eq. (1.84), fornece

$$\Delta s = \Delta x = L_p \qquad (1.87)$$

isto é, o comprimento próprio L_p pode ser determinado usando-se medidas de tempos Δt e distâncias Δx executadas em quaisquer referenciais inerciais, uma vez que para esses, Δs é invariante.

O <u>intervalo do tipo luminoso</u> ($c\Delta t = \Delta x$), está associado a pulsos luminosos que, ao deixar o local do primeiro evento, chega ao local do segundo evento no mesmo instante em que este ocorre, como se evidencia na Fig. 1.23(c). Como $\Delta s = 0$ nesses casos, a eq. (1.84), fornece

$$c\Delta t = \Delta x \qquad (1.88)$$

Deve-se notar que, sendo o intervalo do tipo luminoso uma fronteira entre os intervalos dos tipos temporal e espacial, as eqs. (1.86) e (1.87) se aplicam também a esse intervalo. Entretanto, se o intervalo é do tipo luminoso, das eqs. (1.86) e (1.87), o intervalo de tempo próprio T_p e o comprimento próprio L_p são nulos, uma vez que $\Delta s = 0$.

A linha do universo de entidades que se movem com velocidade da luz é do tipo luminosa. Como se sabe, a linha do universo de um raio luminoso é a bissetriz dos eixos ct e x do diagrama espaço-tempo. Na região hachurada da fig. 1.24 ocorrem os intervalos do tipo temporal, e tem em comum o fato de sua ordem no tempo ser a mesma do ponto de vista de qualquer referencial inercial.

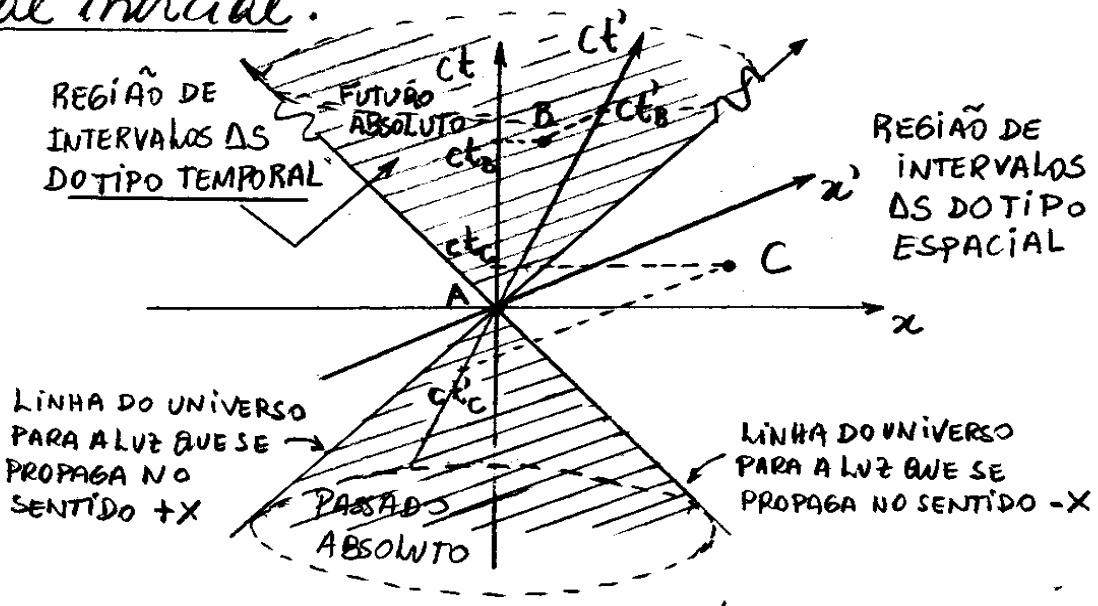


fig. 1.24 - Diagramas de espaço tempo para dois referenciais inerciais S e S' com a ocorrência de diferentes eventos.

Por exemplo, os observadores em S e S' concordam que o evento A ocorre antes de B, embora obtenham diferentes valores para os intervalos de espaço e tempo. Por outro lado, a ordem no tempo de eventos separados por um intervalo do tipo espacial depende do referencial considerado. Por exemplo, o evento A ocorre antes de C em S, mas o evento C ocorre antes de A em S'.

1.8.7 – Paradoxo dos Gêmeos.

O paradoxo dos Gêmeos, ou paradóxo do relógio, refere-se a uma discordância temporal aparente de dois observadores gêmeos, quando um deles faz uma viagem e retorna ao ponto de partida.

Sejam Homero e Ulisses gêmeos idênticos. Suponha que Ulisses viaja a uma alta velocidade até um planeta distante e, logo em seguida, retorna a terra. Se Homero fica na terra durante toda a viagem de Ulisses, qual seria o intervalo de tempo desta viagem do ponto de vista dos dois irmãos? A fig. 1.25 mostra um esquema do problema.

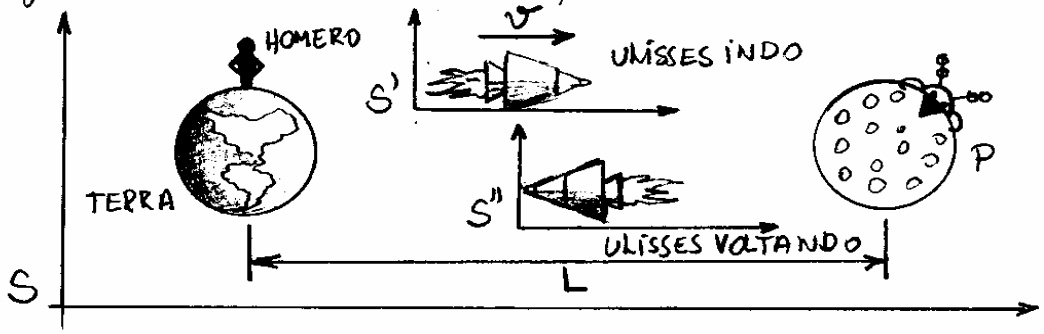


fig. 1.25 – Viagem de Ulisses da terra, onde ficou seu irmão gêmeo Homero, até um planeta P distante.

O planeta P, a terra e Homero são mantidos num referencial inercial S. Por outro lado, a nave de Ulisses é mantida em referenciais inerciais S' e S'', na ida e na volta, respectivamente.

Ulisses rapidamente adquire a velocidade v e viaja em S' até chegar ao planeta P. Nesse momento, pára momentaneamente no referencial S. Em seguida readquire a velocidade v, viaja em S'' até chegar a terra, onde novamente fica em repouso.

Seja, por exemplo, a distância $L = 4$ anos-luz entre o planeta P e a terra, e $v = 0{,}8c$. Nesse caso, tem-se

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 5/3 \qquad (1.89)$$

Do ponto de vista de Homero, a viagem de Ulisses até o planeta P, durou

$$\Delta t = \frac{L}{v} = \frac{4c \text{ anos}}{0{,}8c} = 5 \text{ anos} \qquad (1.90)$$

e o mesmo intervalo de tempo no retorno. Assim, Homero ficou 10 anos mais velho quando Ulisses retorna de viagem. Em função da dilatação do tempo, do ponto de vista de Homero a viagem de Ulisses até o planeta P será menor e dada, por

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma} = \frac{5 \text{ anos}}{5/3} = 3 \text{ anos} \qquad (1.91)$$

e o mesmo intervalo de tempo no retorno. Assim, Ulisses terá envelhecido apenas 6 anos durante toda a sua viagem.

O problema ocorre quando os cálculos para Homero, são feitos do ponto de vista de Ulisses. Do ponto de vista de Ulisses, é a terra e o planeta P que se movem em relação a ele com velocidade $v = -0{,}8c$. Como para Ulisses, a viagem até o planeta P durou $\Delta t' = 3$ anos, o intervalo de tempo $\Delta t''$ na terra deveria ser reduzido, para

$$\Delta t'' = \frac{\Delta t'}{\gamma} = \frac{3}{5/3} = 1{,}8 \text{ anos} \qquad (1.92)$$

e o mesmo intervalo de tempo no retorno. Então, por que Homero não envelheceu <u>somente 3,6 anos</u> durante toda a viagem de Ulisses? Evidentemente <u>este é o paradoxo</u>.

A discordância dos resultados decorre do fato de as situações dos gêmeos <u>não serem simétricas</u>. Homero permanece o tempo todo <u>no mesmo referencial inercial</u>, enquanto Ulisses <u>muda de referencial</u>, como se observa no diagrama espaço-tempo da viagem do ponto de vista dos dois irmãos, mostrado na fig. 1.26. Mesmo que o tempo necessário para a mudança de referencial seja pequeno se comparado ao tempo total da viagem, este fato é essencial para a comparação das idades de Homero e Ulisses no final da viagem.

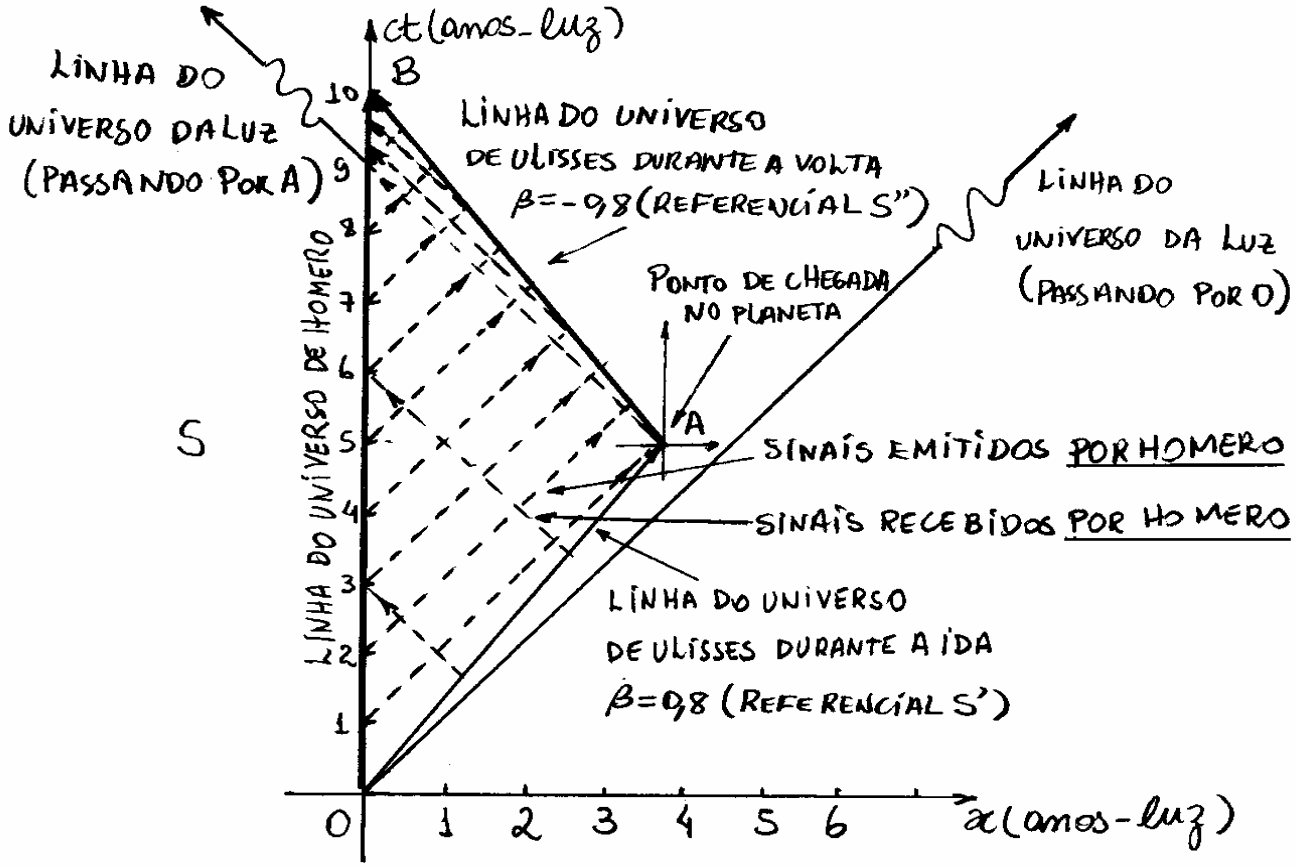


fig. 1.26 – Diagrama espaço-tempo da viagem de Ulisses ao planeta P no referencial inercial S em que Homero e o planeta estão em repouso.

A análise correta do problema é feita à partir do intervalo espaço-tempo invariante Δs dado na eq. (1.84), isto é:

$$(\Delta s)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 \Rightarrow \left(\frac{\Delta s}{c}\right)^2 = (\Delta t)^2 - \left(\frac{\Delta x}{c}\right)^2$$

ou,

$$T_p^2 = (\Delta t)^2 - \left(\frac{\Delta x}{c}\right)^2$$

pois, como eventos ocorrem no mesmo local em S' ou S'', o intervalo é do <u>tipo temporal para o movimento da nave de Ulisses</u> e, portanto, $T_p = \Delta s/c$ de acordo com a eq. (1.86).

Por outro lado, os intervalos Δt e Δx podem ser medidos em qualquer referencial inercial. Assim, do ponto de vista de Homero, tem-se

$$(\Delta t)^2 = T_p^{\,2} + \left(\frac{\Delta x}{c}\right)^2.$$

Note que, como $(\Delta x/c)^2 > 0$, Homero observa um intervalo de tempo $\Delta t > T_p$. O valor de T_p é calculado por Ulisses que, no exemplo considerado, $T_p = 3$ anos para a viagem de ida. Neste exemplo, no referencial de Homero, a razão entre os intervalos Δx e Δt será dado, por

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = 0{,}8c \;\Rightarrow\; \Delta x = 0{,}8c\,\Delta t$$

e, então

$$(\Delta t)^2 = (3\text{ anos})^2 + \left(\frac{0{,}8c\,\Delta t}{c}\right)^2$$

ou,

$$\Delta t = \frac{3}{0{,}6} = 5 \text{ anos}$$

ou 10 anos para a viagem completa, como se concluiu anteriormente.

No contexto da relatividade especial, o problema acima pode ser analisado do ponto de vista de Homero mas não do ponto de vista de Ulisses, uma vez que este não permaneceu no mesmo referencial inercial durante todo o experimento. Assim, o problema do ponto de vista de Ulisses foge ao âmbito da relatividade especial e o paradoxo deixa de existir.

O paradoxo dos gêmeos pode ser resolvido por um procedimento, proposto por C.G. Darwin, que utiliza como base o <u>efeito Doppler</u>. Homero e Ulisses combinam que todo ano cada irmão enviará um sinal luminoso para o outro. Cada irmão poderá saber a idade do outro simplesmente contando os sinais recebidos. Evidentemente, a <u>freqüência de sinais recebidos</u> não será de 01 por ano, por causa do <u>efeito Doppler</u>. Quando os dois irmãos estão se <u>afastando</u>, a freqüência ν_{af} será dada, por:

$$\nu_{af} = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}\,\nu' = \sqrt{\frac{c-0{,}8c}{c+0{,}8c}}\,\nu' = \sqrt{\frac{0{,}2}{1{,}8}}\,\nu' = \sqrt{\frac{2}{18}}\,\nu' = \frac{1}{3}\nu'$$

e quando os dois estão se <u>aproximando</u>, $\nu_{ap} = 3\nu'$, onde ν' é a <u>freqüência dos sinais nos seus referenciais de repouso</u>.

As retas tracejadas na fig. 1.26, mostram as linhas do universo dos sinais transmitidos pelos gêmeos na freqüência de 1 sinal/ano em seus relógios.

Como $\nu_{af} = 1/3\,\nu'$ durante a ida, <u>Homero recebe 3 sinais nos primeiros 9 anos</u> e <u>Ulisses apenas 1 sinal nos primeiros 3 anos</u>. Por outro lado, como $\nu_{ap} = 3\nu'$ durante a volta, <u>Homero recebe 3 sinais durante o último ano</u> (décimo) e <u>Ulisses 9 sinais durante os últimos 3 anos</u>.

Logo, Homero conclui que Ulisses envelheceu $3+3=6$ anos e Ulisses conclui que Homero envelheceu $1+9=10$ anos, como de fato teria ocorrido.

1.9 – Dinâmica Relativística

Quando se discutiu a observação clássica de que se a 2ª lei de Newton $\vec{F}=m\vec{a}$ é válida em um referencial inercial, notou-se que também é válida em qualquer outro referencial inercial que esteja em movimento em relação ao primeiro. Como se viu, a transformação de Galileu leva à mesma aceleração $a'_x = a_x$ nos dois referenciais. Por outro lado, do ponto de vista relativístico, as transformações de Lorentz leva a diferentes valores dessas acelerações. De acordo com a eq. (1.57), se uma partícula tem uma aceleração a_x e uma velocidade u_x no referencial S, a aceleração dessa partícula em S', será

$$a'_x = \frac{a_x}{\gamma^3(1 - vu_x/c^2)^3} \qquad (1.93)$$

Assim, para que a 2ª lei de Newton $\vec{F}=m\vec{a}$ seja válida no segundo referencial é necessário que $\vec{F}/m$ também não seja o mesmo nos dois referenciais. Nesse caso, se faz necessário uma nova formulação para a lei de movimento, que seja entretanto, equivalente à versão clássica de Newton quando $\beta = v/c \to 0$, um vez que, esses casos estão de acordo com as observações experimentais.

Nesta seção discutir-se-á as mudanças introduzidas na dinâmica clássica pela teoria

da relatividade especial. Especificamente, as mudanças referem-se as três grandezas básicas da mecânica clássica, que são: massa, momento e energia.

1.9.1 - Momento Relativístico

As leis de conservação do momento e o princípio de conservação da energia total, estão entre os princípios mais importantes da física clássica.

Na teoria clássica, o momento de uma partícula é dado por $p = mu$, onde m é a massa e u a velocidade da partícula. Na ausência de forças externas, o momento linear da partícula se conserva. Inicialmente, deve-se mostrar que, se se quer encontrar o momento, que vale a lei da conservação na Física clássica, e também sujeito a uma lei de conservação na Relatividade, não se pode então usar a mesma expressão clássica para o momento. Deve-se, ao invés disso, redefinir o momento com a finalidade de que a lei de conservação do momento em colisões seja invariante com a transformação de Lorentz.

Considere-se uma colisão elástica entre duas partículas idênticas A e B, vista por observadores inerciais diferentes S e S', de acordo com a mecânica Newtoniana, como mostra a fig. 1.27.

Adota-se uma colisão altamente simétrica em S' como se vê na fig. 1.27(a). As partículas A e B, tem velocidades iniciais iguais em módulo, mas direções opostas, de modo que o momento total seja nulo ($\Sigma p_i = \Sigma p_f$) e, $u'_{yiA} = -u'_{yiB}$, ou em módulo:

$$u'_{yiA} = u'_{yiB} \qquad (1.94)$$

Similarmente, conclue-se que, em módulo, $u'_{xiA} = u'_{xiB}$. Como a colisão é elástica, as velocidades finais tem mesmos módulos que as velocidades iniciais, isto é

$$u'_{yiA} = -u'_{yfA} \; ; \; u'_{yiB} = -u'_{yfB} \quad e \quad u'_{xiA} = u'_{xfA} \; ; \; u'_{xiB} = u'_{xfB}$$

Assim, para S' as componentes y' da velocidade simplesmente invertem seus sinais e as componentes x' mantem-se inalteradas.

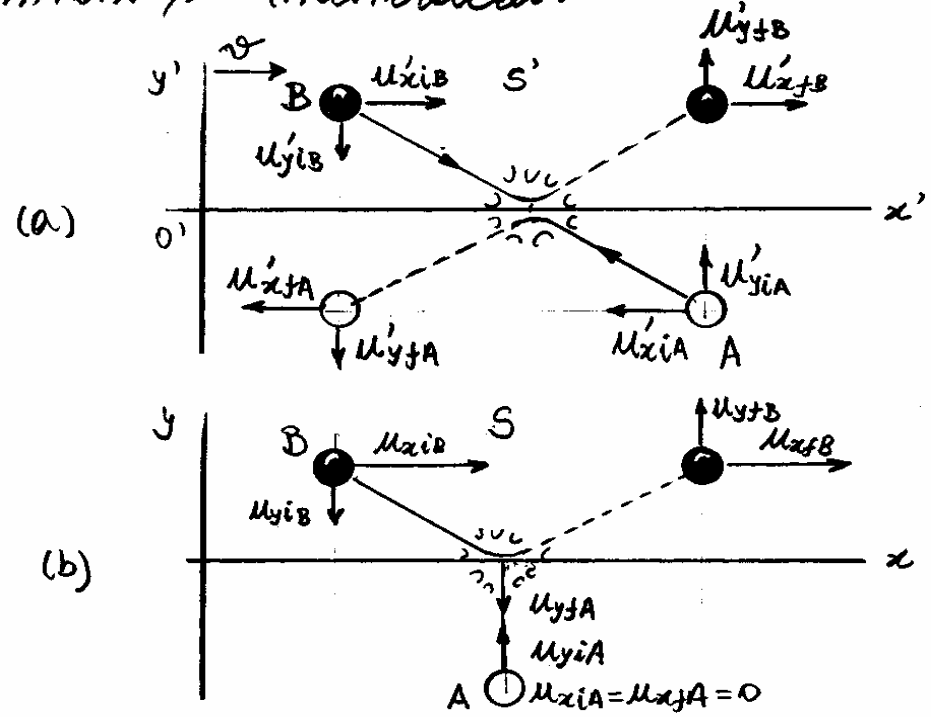


fig. 1.27 – Colisão de duas partículas idênticas, (a) vista de S' e, (b) vista de S.

Visto do referencial S, o referencial S' move-se para a direita com uma velocidade v. Por motivos de simplificação, escolhe-se

$$v = u'_{xiB} = -u'_{xiA} \qquad (1.95)$$

tal que a partícula A não tem componente x do movimento no referencial S, como se vê na fig. 1.27(b). De acordo com as transformações de Galileu, as componentes y da velocidade não deve ser afetada, e o momento deve ainda ser conservado na colisão, quando visto de S, isto é

$$u_{yfA} = -u_{yiA} \quad ; \quad u_{yfB} = -u_{yiB} \qquad (1.96)$$

e, também, $u_{yiA} = u'_{yiA}$ e $u_{yiB} = u'_{yiB}$. Da conservação do momento em S; $\Sigma_i p_i = \Sigma_f p_f$, tem-se

$$m_A u_{yiA} - m_B u_{yiB} = m_A u_{yfA} - m_B u_{yfB}$$

ou, das eqs. (1.96),

$$m_A u_{yiA} - m_B u_{yiB} = -m_A u_{yiA} - (-m_B u_{yiB})$$

ou ainda,

$$2 m_A u_{yiA} = 2 m_B u_{yiB} \qquad (1.97)$$

de onde se conclui, que

$$u_{yiA} = u_{yiB} \qquad (1.98)$$

Desde que $m_A = m_B = m$ sejam invariantes ao movimento relativo entre os referenciais. Note que, na direção desse movimento (eixo x), do ponto de vista de S, a partícula A está em repouso e B não.

Do ponto de vista das transformações de Lorentz, tem-se

$$u'_{yiB} = \frac{u_{yiB}\sqrt{1-\beta^2}}{1 - u_{xiB}v/c^2} \qquad (1.99)$$

enquanto que, para a partícula A, para a qual $u_{xiA} = 0$, tem-se

$$u'_{yiA} = u_{yiA}\sqrt{1-\beta^2} \qquad (1.100)$$

Admitindo-se, como na eq. (1.94) da <u>conservação do momento</u> em S, $u'_{yiA} = u'_{yiB}$, as eqs. (1.99) e (1.100), resultam

$$u_{yiA}\sqrt{1-\beta^2} = \frac{u_{yiB}\sqrt{1-\beta^2}}{1 - u_{xiB}v/c^2}$$

ou,

$$u_{yiA} = u_{yiB}\frac{1}{1 - u_{xiB}v/c^2} \qquad (1.101)$$

que está <u>inconsistente</u> com o resultado Newtoniano expresso pela eq. (1.98). O resultado revela que, quando se calcula o momento pela fórmula clássica, $\vec{p} = m\vec{u}$ e $\vec{p}' = m\vec{u}'$, <u>se é conservado</u> numa colisão num <u>referencial</u>, <u>não o será num outro</u>. Isto contraria o postulado básico da Relatividade especial, que diz que, as <u>leis da Física</u> <u>são as mesmas</u> em todos os <u>referenciais inerciais</u>.

Se a conservação do momento tem que ser uma lei Física, então a definição clássica do momento, em geral, não pode estar correta. Deve-se observar que a eq. (1.101) se reduz a eq. (1.98) quando u_{xiB} e $v \ll c$, tal que é nas altas velocidades que a formulação Newtoniana da lei da conservação do momento desmorona. Assim, torna-se necessária uma generalização da definição do momento, que deve se reduzir ao resultado clássico a baixas velocidades.

Na eq. (1.98), admitiu-se que a massa m era a mesma para cada partícula e, dessa forma, chegou-se ao resultado incorreto de que a componente y das velocidades eram idênticas em módulo. Uma forma de preservar a definição clássica do momento $\vec{p} = m\vec{u}$, e, ao mesmo tempo, manter a lei da conservação do momento na Relatividade especial, seria admitir que a massa m da partícula dependa do movimento relativo dos referenciais S e S'. Com essa hipótese, a eq. (1.97) deve ser mantida sem nenhuma alteração, isto é

$$2m_A u_{yiA} = 2m_B u_{yiB} \qquad (1.102)$$

onde as massas m_A e m_B podem agora ter diferentes valores. As partículas A e B na fig. 1.27(b), se deslocam com diferentes velocidades no referencial S e, utilizando-se o resultado relativístico da eq. (1.101) na eq. (1.102), obtém-se:

$$m_B = m_A \frac{u_{yiA}}{u_{yiB}} = \frac{m_A}{1 - u_{xiB}\vartheta/c^2} \qquad (1.103)$$

Assim, as <u>massas relativísticas</u>, m_A e m_B, não podem ser iguais se a lei relativística da conservação do momento tiver a mesma forma da teoria clássica.

Da transformação de Lorentz e da eq. (1.95) $u'_{xiB} = \vartheta$, tem-se

$$\vartheta = u'_{xiB} = \frac{u_{xiB} - \vartheta}{1 - u_{xiB}\vartheta/c^2} \qquad (1.104)$$

ou,

$$\vartheta\left(1 - \frac{u_{xiB}\vartheta}{c^2}\right) = u_{xiB} - \vartheta \Rightarrow \frac{u_{xiB}}{c^2}\vartheta^2 - 2\vartheta + u_{xiB} = 0$$

cuja solução para ϑ, é

$$\vartheta = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4\frac{u_{xiB}}{c^2}u_{xiB}}}{2\frac{u_{xiB}}{c^2}} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - u_{xiB}^2/c^2}}{u_{xiB}/c^2}$$

ou,

$$\vartheta = \frac{c^2}{u_{xiB}}\left(1 - \sqrt{1 - u_{xiB}^2/c^2}\right) \qquad (1.105)$$

uma vez que o sinal (+) resultaria em <u>velocidades ϑ maiores que da luz c</u>. Substituindo a eq. (1.105) na eq. (1.103), obtém-se

$$m_B = \frac{m_A}{1 - \frac{u_{xiB}}{c^2}\left[\frac{c^2}{u_{xiB}}\left(1 - \sqrt{1 - u_{xiB}^2/c^2}\right)\right]} = \frac{m_A}{1 - \left(1 - \sqrt{1 - u_{xiB}^2/c^2}\right)}$$

ou,

$$m_B = \frac{m_A}{\sqrt{1 - u_{xiB}^2/c^2}} \qquad (1.106)$$

Pode-se encontrar como a massa relativística de uma das partículas varia com a velocidade, considerando um caso particular de colisão, no qual se supõe nulas as componentes y e y' da velocidade. Esse é o caso de colisão de raspão que está ilustrado na fig. 1.28. O observador em S' vê simplesmente duas partículas cruzarem. O observador em S vê a partícula A em repouso e a partícula B passando por ele, com uma velocidade u_{xiB}. A eq. (1.106) pode ser aplicada também a essa colisão de raspão, uma vez que, não se impôs nenhuma restrição para u_{iy}.

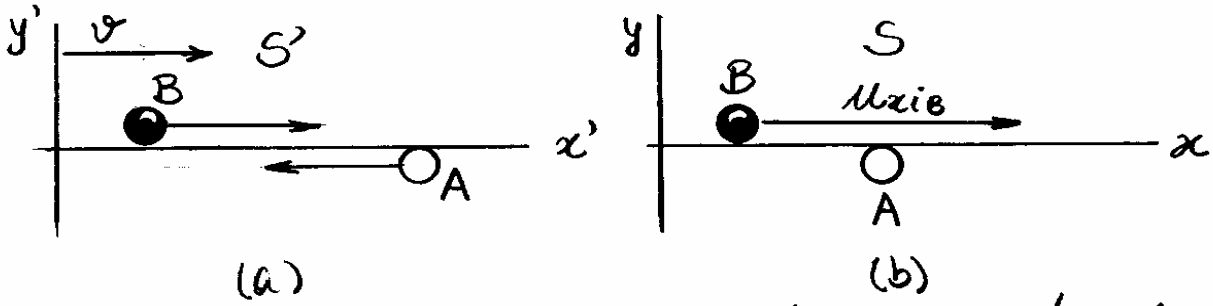


fig. 1.28 – Colisão de raspão entre as partículas A e B, (a) vista de S' e, (b) vista de S.

Como a partícula A está em repouso em S, sua massa m_A será a massa Newtoniana comum, a qual será denominada de massa de repouso m_0. Esta é a mesma massa de B, quando B está em repouso, sendo as duas partículas idênticas.

Por outro lado, a partícula B está se movendo com uma velocidade u_{xiB} em S, que será simbolizada simplesmente por u. A massa m_B de B será denominada de massa relativística, simbolizada simplesmente por m. Da eq. (1.106), obtém-se

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \tag{1.107}$$

que mostra que a massa relativística m de uma partícula, se movendo com uma velocidade u, depende do valor dessa velocidade. Nota-se imediatamente que, quando $u \to 0$, obtém-se $m = m_0$. Assim, para se preservar a forma da lei clássica da conservação do momento, mantendo-a invariante relativisticamente, deve-se definir a massa de uma partícula em movimento pela eq. (1.107). Isto é, o momento continua tendo a forma antiga, mas escrita explicitamente, como

$$\vec{p} = m\vec{u} = \frac{m_0 \vec{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \tag{1.108}$$

É importante observar que u é a velocidade de uma partícula em relação a S, e que u não tem, necessariamente, conexão com o referencial em movimento S'. A massa em repouso m_0 é freqüentemente denominada de massa própria, pois é medida no referencial inercial no qual a partícula está em repouso.

Na dedução que se fez para o momento relativístico adotou-se um caso particular de conservação de momento na direção y. O que se tem feito, na verdade, é evitado deduções gerais um tanto quanto complicadas, que levam exatamente aos mesmos resultados. No caso geral, u torna-se o valor absoluto da velocidade da partícula, isto é, $u^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2$. Nesse caso, as componentes do vetor momento $\vec{p}$, definido na eq. (1.109), seriam dados, por

$$p_x = \frac{m_0 u_x}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \; ; \; p_y = \frac{m_0 u_y}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \; ; \; p_z = \frac{m_0 u_z}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \qquad (1.109)$$

A definição da massa relativística (1.107) pode ser utilizada para calcular valores de u/c para a qual essa massa excederá sua massa de repouso por uma fração f. Isso se faz, como segue

$$f = \frac{m-m_0}{m_0} = \frac{m}{m_0} - 1 = \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} - 1$$

ou, resolvendo-se para u/c, tem-se

$$u/c = \frac{\sqrt{f(2+f)}}{1+f} \qquad (1.110)$$

Pode-se usar alguns valores como exemplo: Se $f = 0{,}001 = 0{,}1\%$, obtém-se, $u/c = 0{,}014$; Se $f = 1 = 100\%$, obtém-se $u/c = 0{,}87$; Se $f = 100$, obtém-se $u/c = 0{,}999$.

1.9.2 - Energia Relativística

Do ponto de vista relativístico a 2ª lei de Newton deve ser generalizada, para

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{p} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\vec{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right) \qquad (1.111)$$

Escrita dessa forma, a 2ª lei de Newton pode deduzir a lei da conservação do momento relativístico diretamente. Quando $\vec{F}$ é nula, $\vec{p} = m_0\vec{u}/\sqrt{1-u^2/c^2}$ deve ser uma constante. Isto é, na ausência de forças externas, o momento relativístico é conservado.

A energia cinética K é igual ao trabalho efetuado por uma força para acelerar a partícula desde o repouso até uma velocidade u, isto é

$$K = \int_{u=0}^{u} F\,dx = \int \frac{dp}{dt}\,dx = \int d(mu)\frac{dx}{dt} = \int (m\,du + u\,dm)\,u$$

ou,

$$K = \int_{u=0}^{u} (mu\,du + u^2 dm) \qquad (1.112)$$

As variáveis m e u relacionam-se, por

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \Rightarrow m^2 - m^2\frac{u^2}{c^2} = m_0^2 \Rightarrow m^2c^2 = m^2u^2 + m_0^2c^2$$

Diferenciando-se esta equação, obtém-se

$$2mc^2dm = m^2 2u\,du + u^2 2m\,dm$$

ou, dividindo ambos os lados por $2m$, obtém-se

$$mu\,du + u^2 dm = c^2 dm$$

que é exatamente o integrando da eq. (1.112), de modo que a expressão da energia cinética relativística de uma partícula, pode ser escrita como

$$K = \int_{u=0}^{u} c^2 dm = c^2 \int_{m=m_0}^{m} dm = mc^2 - m_0 c^2 \qquad (1.113)$$

Note que os limites de integração foram trocados na mudança de variáveis. Para a partícula em repouso ($u=0$), sua massa é a massa de repouso m_0, e para a partícula com velocidade u, sua massa é a massa relativística m.

A expressão da energia cinética tem assim, dois termos. O primeiro depende da velocidade da partícula, e o segundo m_0c^2 é independe dessa velocidade. O termo m_0c^2 é denominado de <u>energia de repouso</u>, ou <u>energia própria</u> E_0 da partícula, isto é

$$E_0 = m_0 c^2 \qquad (1.114)$$

A eq. (1.113) mostra que o primeiro termo define a energia total E de uma <u>partícula livre</u>, na forma

$$E = K + m_0c^2 = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \qquad (1.115)$$

onde usou-se a definição (1.107) para a massa relativística m.

Note-se que, a comparação da eq. (1.114) com a eq. (1.115), resulta em

$$\mathcal{E} = \frac{E_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \tag{1.116}$$

Com a finalidade de se mostrar que a energia relativística se reduz ao caso clássico para baixas velocidades, deve-se notar que a eq. (1.113) pode ser reescrita, como

$$K = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} - m_0c^2 = m_0c^2\left[\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2} - 1\right]$$

Usando-se a expansão binomial, $(1+x)^n = 1 + nx + n(n-1)x^2/2 + \ldots$, nota-se que

$$\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{c}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(\frac{u}{c}\right)^4 + \ldots$$

e então, desprezando termos de ordem maior que $(u/c)^2$, para o caso $u/c \ll 1$, obtém-se

$$K \simeq m_0c^2\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{c}\right)^2 - 1\right] = \frac{1}{2}m_0u^2$$

que é o resultado clássico. Deve-se notar também da eq. (1.115), que $K \to \infty$ quando $u \to c$. Isto é, do fato que $K = \int_{u=0}^{u} F\,dx$, seria necessário um <u>trabalho infinito</u> sobre a partícula para <u>acelerá-la até a velocidade da luz</u>.

Mais uma vez obtém-se c como desempenhando o papel de um limite para a velocidade.

Uma expressão muito útil, relacionando energia relativística e momento relativístico, pode ser encontrada subtraindo-se os quadrados das energias total e de repouso, isto é

$$(mc^2)^2 - (m_0c^2)^2 = \left(\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right)^2 - (m_0c^2)^2$$

$$= (m_0c^2)^2\left(\frac{1}{1-u^2/c^2} - 1\right) = m_0^2c^4\left(\frac{u^2/c^2}{1-u^2/c^2}\right) = c^4\frac{u^2}{c^2}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right)^2$$

ou, como $m = m_0/\sqrt{1-u^2/c^2}$, e $p = mu$, obtém-se

$$(mc^2)^2 - (m_0c^2)^2 = c^2m^2u^2 = c^2p^2$$

ou ainda,

$$E^2 = (pc)^2 + E_0^2 \qquad (1.117)$$

onde, $E_0 = m_0c^2$ é a energia de repouso da partícula. A eq. (1.117) é extremamente importante na solução de problemas de relatividade que envolvem energias e momentos de partículas. O triângulo retângulo da fig. 1.28, é um artifício mneumônico útil para lembrar a eq. (1.117).

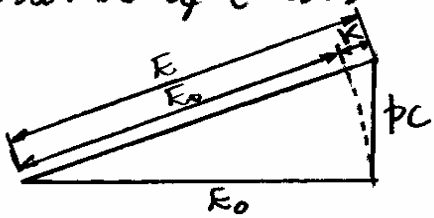


Fig. 1.28 - Artifício mneumônico para lembrar a eq. (1.117).

Exemplo 1.5

A energia de repouso de um próton é de 938 MeV. Se a sua energia cinética for também 938 MeV, achar (a) o seu momento e (b) a sua velocidade.

(a) Como $E_0 = K = 938\,MeV$, então a energia total E, será

$$E = K + E_0 = E_0 + E_0 = 2E_0$$

assim, tem-se

$$E^2 = (pc)^2 + E_0^2 \Rightarrow 4E_0^2 = (pc)^2 + E_0 \Rightarrow (pc)^2 = 3E_0^2$$

$$\Rightarrow pc = \sqrt{3}\,E_0 = \sqrt{3}\,938 \simeq 1625\,MeV$$

Escreve-se isso, como

$$\boxed{p \simeq 1625\,MeV/c}$$

(b) Como, $E = \dfrac{E_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = 2E_0$, então

$$\frac{1}{1-u^2/c^2} = 4 \Rightarrow 1 - \frac{u^2}{c^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{u^2}{c^2} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow u = \frac{\sqrt{3}}{2}c \Rightarrow \boxed{u = 0{,}866\,c}$$

1.9.3 - Transformações do Momento, Energia, Massa e Força.

Nesta seção apresenta-se as relações, que transformam os valores do momento, energia, massa e força em um referencial S, em valores correspondentes dessas quantidades num referencial S' que se move com velocidade constante v, em relação a S, ao longo do eixo comum x, x'.

Antes de derivar as relações desta seção propriamente ditas, vejamos como o módulo da velocidade u' de uma partícula num plano x, y, num referencial S', transforma-se em u num referencial S. Para tanto, sejam as transformações de Lorentz para as componentes x e y da velocidade da partícula:

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + u'_x (v/c^2)} \quad ; \quad u_y = \frac{u'_y \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + u'_x (v/c^2)} \qquad (1.118)$$

A falta da componente z da velocidade será irrelevante para nossos objetivos.

Das eqs. (1.118) pode-se obter o quadrado do módulo da velocidade da partícula em S, isto é

$$u^2 = u_x^2 + u_y^2 = \left[\frac{u'_x + v}{1 + u'_x (v/c^2)}\right]^2 + \left[\frac{u'_y \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + u'_x (v/c^2)}\right]^2$$

$$= \frac{(u'_x + v)^2 + u'^2_y \left(\frac{c^2 - v^2}{c^2}\right)}{\left(\frac{c^2 + u'_x v}{c^2}\right)^2} = \frac{c^4 u'^2_x + c^4 v^2 + 2 u'_x v c^4 + c^2 u'^2_y (c^2 - v^2)}{(c^2 + u'_x v)^2}$$

ou,

$$u^2 = \frac{c^4 u_x'^2 + c^4 v^2 + 2u_x' v c^4 + c^4 u_y'^2 - c^2 u_y'^2 v^2}{(c^2 + u_x' v)^2}$$

Esta equação torna-se mais compacta quando é subtraída do quadrado da velocidade da luz, isto é

$$c^2 - u^2 = c^2\left[1 - \frac{c^2 u_x'^2 + c^2 v^2 + 2u_x' v c^2 + c^2 u_y'^2 - u_y'^2 v^2}{(c^2 + u_x' v)^2}\right]$$

$$= c^2\left[\frac{(c^2 + u_x' v)^2 - (c^2 u_x'^2 + c^2 v^2 + 2u_x' v c^2 + c^2 u_y'^2 - u_y'^2 v^2)}{(c^2 + u_x' v)^2}\right]$$

$$= c^2\left[\frac{c^4 + u_x'^2 v^2 + \cancel{2c^2 u_x' v} - c^2 u_x'^2 - c^2 v^2 - \cancel{2u_x' v c^2} - c^2 u_y'^2 + u_y'^2 v^2}{(c^2 + u_x' v)^2}\right]$$

$$= c^2\left[\frac{c^2(c^2 - u_x'^2 - u_y'^2) - v^2(c^2 - u_x'^2 - u_y'^2)}{(c^2 + u_x' v)^2}\right] = c^2\left[\frac{c^2(c^2 - u'^2) + v^2(c^2 - u'^2)}{(c^2 + u_x' v)^2}\right]$$

ou,

$$c^2 - u^2 = \frac{c^2(c^2 - u'^2)(c^2 - v^2)}{(c^2 + u_x' v)^2} \qquad (1.119)$$

Desta equação pode-se calcular o fator $1/\sqrt{1 - u^2/c^2}$ como segue:

$$\frac{(c^2 - u'^2)(c^2 - v^2)}{(c^2 + u_x' v)^2} = \frac{c^2 - u^2}{c^2} = 1 - \frac{u^2}{c^2}$$

ou, invertendo-se e tirando-se a raiz quadrada, tem-se

$$\frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{c^2 + u_x' v}{\sqrt{(c^2 - u'^2)(c^2 - v^2)}} = \frac{c^2(1 + u_x' v/c^2)}{\sqrt{(c^2 - u'^2)(c^2 - v^2)}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{(1+u_x'v/c^2)}{\sqrt{(c^2-u'^2)(c^2-v^2)}/c^2} = \frac{(1+u_x'v/c^2)}{\sqrt{\frac{(c^2-u'^2)(c^2-v^2)}{c^4}}}$$

$$= \frac{(1+u_x'v/c^2)}{\sqrt{\frac{(c^2-u'^2)}{c^2}\frac{(c^2-v^2)}{c^2}}} = \frac{(1+u_x'v/c^2)}{\sqrt{1-u'^2/c^2}\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

ou,

$$\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \gamma \frac{(1+u_x'v/c^2)}{\sqrt{1-u'^2/c^2}} \qquad (1.120)$$

onde, $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ é o fator de Lorentz. Para se determinar as transformações para o momento e energia, recorde-se que

$$p_x = \frac{m_0 u_x}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \quad ; \quad p_x' = \frac{m_0 u_x'}{\sqrt{1-u'^2/c^2}}$$

e,

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \quad ; \quad E' = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-u'^2/c^2}} \qquad (1.121)$$

Substituindo-se a primeira eq. (1.118) e a eq. (1.120) na primeira eq. (1.121), obtém-se

$$p_x = m_0 \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} u_x = m_0 \gamma \frac{\cancel{(1+u_x'v/c^2)}}{\sqrt{1-u'^2/c^2}} \frac{(u_x'+v)}{\cancel{(1+u_x'v/c^2)}}$$

$$= \gamma\left(\frac{m_0 u_x'}{\sqrt{1-u'^2/c^2}} + \frac{m_0 v}{\sqrt{1-u'^2/c^2}}\right) = \gamma\left(p_x' + \frac{m_0 c^2 v/c^2}{\sqrt{1-u'^2/c^2}}\right)$$

ou,

$$p_x = \gamma\left(p_x' + E'v/c^2\right) \qquad (1.122)$$

Similarmente, mostra-se que

$$p_y = p_y' \quad e \quad p_z = p_z' \tag{1.123}$$

Substituindo-se agora a eq. (1.120) na terceira eq. (1.121), obtém-se

$$E = m_0 c^2 \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = m_0 c^2 \gamma \frac{(1+u_x' v/c^2)}{\sqrt{1-u'^2/c^2}}$$

$$= \gamma \left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-u'^2/c^2}} + \frac{m_0 u_x'}{\sqrt{1-u'^2/c^2}} v \right)$$

ou,

$$E = \gamma (E' + v p_x') \tag{1.124}$$

As relações inversas, obtidas trocando-se v por $-v$ e permutando-se as quantidades em S e S', são

$$p_x' = \gamma (p_x - E v/c^2) \; ; \; p_y' = p_y \; ; \; p_z' = p_z$$

e,

$$E' = \gamma (E - v p_x) \tag{1.125}$$

Se os resultados obtidos acima são comparados com as transformações iniciais de Lorentz, envolvendo x, y, z, t e x', y', z', t', encontra-se uma surpreendente analogia. As quantidades p_x, p_y, p_z e E/c^2 transformam-se, exatamente, como as coordenadas do espaço-tempo x, y, z e t de uma partícula. Note-se por exemplo, as transformações abaixo, para x', p_x' e $t', E'/c^2$:

$$x' = \gamma(x - vt) \quad e \quad p_x' = \gamma(p_x - vE/c^2)$$
$$t' = \gamma(t - xv/c^2) \quad e \quad E'/c^2 = \gamma(E/c^2 - p_x v/c^2) \tag{1.128}$$

Essa analogia é um excelente processo "mnemônico" para lembrar as transformações.

A interdependência entre o momento e a energia, como se viu acima, é uma <u>consequência natural das leis de conservação</u>. Se a <u>energia e o momento são conservados</u> numa interação, do ponto de vista de um observador num referencial inercial, então para <u>qualquer outro observador inercial</u> eles <u>também são conservados</u>. Além disso, se o <u>momento é conservado</u>, então a <u>energia deve também ser conservada</u>.

As transformações para a massa seguem diretamente das transformações da energia. Isto é, como $E = mc^2$, $E' = m'c^2$ e $p_x' = m'u_x'$, a eq. (1.124), $E = \gamma(E' + v p_x')$, fornece

$$mc^2 = \gamma(m'c^2 + v m' u_x')$$

ou,

$$m = \gamma m'(1 + u_x' v/c^2) \tag{1.129}$$

cuja inversa, é

$$m' = \gamma m(1 - u_x' v/c^2) \tag{1.130}$$

Finalmente, para se obter as transformações para a força, deve-se partir de suas componentes em S e S':

$$F_x = \frac{d}{dt}(m u_x) \; ; \; F_y = \frac{d}{dt}(m u_y) \; ; \; F_z = \frac{d}{dt}(m u_z)$$

$$F'_x = \frac{d}{dt'}(m'u'_x) \; ; \; F'_y = \frac{d}{dt'}(m'u'_y) \; ; \; F'_z = \frac{d}{dt'}(m'u'_z)$$

A dedução completa para as transformações da força é, algebricamente, um tanto quanto complicado e vai além dos objetivos deste trabalho. Entretanto, deve ser imediato, em princípio, pois, simplesmente usa-se as equações de transformação, que já são bem estabelecidas. As componentes da força se transformam como segue:

$$F_x = \frac{F'_x + (v/c^2)\vec{u}'.\vec{F}'}{(1+u'_x v/c^2)}$$

$$F_y = \frac{F'_y}{\gamma(1+u'_x v/c^2)} \quad ; \quad F_z = \frac{F'_z}{\gamma(1+u'_x v/c^2)} \tag{1.131}$$

cujas relações inversas, são

$$F'_x = \frac{F_x - (v/c^2)\vec{u}.\vec{F}}{(1-u_x v/c^2)}$$

$$F'_y = \frac{F_y}{\gamma(1-u_x v/c^2)} \quad ; \quad F'_z = \frac{F_z}{\gamma(1-u_x v/c^2)} \tag{1.132}$$

onde, $\vec{u} = u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k}$, $\vec{u}' = u'_x\vec{i} + u'_y\vec{j} + u'_z\vec{k}$, e $\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$; $F' = F'_x\vec{i} + F'_y\vec{j} + F'_z\vec{k}$. Pode-se verificar que, no limite Newtoniano onde $v/c \ll 1$, estas equações se reduzem a $\vec{F} = \vec{F}'$, como deve ser.

1.9.3 – Invariância da Energia de Repouso.

Viu-se que, de acordo com os postulados da teoria da relatividade especial, as coordenadas espaciais e temporais são mutuamente dependentes quando medidas em diferentes referenciais inerciais. Dessa forma, o tempo t passa a ser uma quarta coordenada com a mesma importância das coordenadas espaciais x, y, z, num mundo relativístico quadridimensional que se denomina de espaço-tempo. A geometria do espaço-tempo não é a geometria euclidiana do espaço tridimensional, mas uma geometria lorentziana quadridimensional. Essa diferença se torna mais evidente quando se compara a distância $\vec{r}$ entre dois pontos no espaço com o intervalo Δs entre dois eventos no espaço-tempo. A primeira é um vetor cujo módulo r, é dado por

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \qquad (1.133)$$

e é invariante a uma transformação de Galileu. Por outro lado, o módulo do segundo, é dado por

$$(\Delta s)^2 = (c\Delta t)^2 - [(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2] \qquad (1.134)$$

e é invariante a uma transformação de Lorentz. O intervalo Δs é o análogo quadridimensional de $\vec{r}$ e, por isso, é denominado de quadrivetor.

A energia e o momento relativístico são também componentes de <u>outro quadrivetor</u>. Viu-se que o momento e a energia, não são apenas conservados mas também satisfazem a transformação de Lorentz. Como se viu nas eqs. 1.122 e 1.123, as componentes do momento $\vec{p} = \vec{p}(p_x, p_y, p_z)$ se transformam como as componentes do vetor posição $\vec{r} = \vec{r}(x, y, z)$, e a energia E se transforma como o tempo t. Note-se que, da eq. (1.117), tem-se

$$E_0^2 = E^2 - (pc)^2 \qquad (1.135)$$

É interessante comparar a eq. (1.135) com a eq. (1.134). Assim como o <u>quadrivetor intervalo espaço-tempo</u> Δs é <u>invariante</u> em diferentes referenciais inerciais, o <u>quadrivetor energia-momento</u> E_0 também é invariante nesses referenciais. As grandezas E e pc são os <u>análogos dinâmicos</u> das <u>grandezas cinemáticas</u> $c\Delta t$ e $\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$, respectivamente.

1.9.4 – <u>Partículas sem Massa</u>.

Assim como o quadrado do intervalo espaço-tempo $(\Delta s)^2$ na eq. (1.134), o quadrado da energia de repouso $(E_0)^2 = (m_0 c^2)^2$ na eq. (1.135) pode, formalmente, assumir <u>valores positivos</u>, <u>negativos</u> ou <u>nulos</u>. Até o momento assumiu-se apenas valores positivos para essa grandeza. O caso em que a expressão assume um <u>valor negativo</u>, aparece em física de partículas no estudo de <u>partículas e anti-</u>

partículas, e será considerado posteriormente. Nesse momento, deve-se investigar a terceira possibilidade, isto é, o caso $(E_0)^2=(m_0c^2)^2=0$, ou $m_0=0$. Deve-se notar que isso não faz sentido do ponto de vista clássico, uma vez que a energia cinética $E=\frac{1}{2}m_0v^2$ e o momento $p=m_0v$ anulam-se para $m_0=0$. Assim, classicamente um objeto de massa nula não se distingui do vazio absoluto, pois não possui nem energia nem momento. Do ponto de vista relativístico entretanto, ao se tomar $m_0=0$ na eq. (1.135), obtém-se

$$E=pc \tag{1.136}$$

Por outro lado, das definições de Energia e momento relativísticos, $E=m_0c^2/\sqrt{1-u^2/c^2}$ e $p=m_0u/\sqrt{1-u^2/c^2}$, tem-se

$$\frac{pc}{E}=\frac{m_0cu}{m_0c^2}=\frac{u}{c} \tag{1.137}$$

que combinada com a eq. (1.136) obtém-se que $u=c$. Isto é, todo corpo cuja massa é nula deve se mover com velocidade da luz. Reciprocamente, uma partícula cuja velocidade é c tem, necessariamente, massa nula e sua energia $E=pc$.

A existência de partículas com $m_0=0$ é amplamente comprovada por observações experimentais. As teorias atuais sugerem a existência de pelo menos três dessas partículas. A mais famosa dessas é o fóton, partícula associada à radiação eletromagnética.

No início do século XX observou-se que a visão clássica ondulatória de Maxwell para a radiação eletromagnética, deveria ser revista em determinadas circunstâncias nas quais a energia e o momento se comportam como se estivessem concentrados em pequenos "pacotes" denominados de fótons. Como se sabe, o intervalo espaço-tempo Δs para a luz <u>também é nulo</u>. Na verdade, o 2º postulado de Einstein impede a existência de uma transformação de Lorentz para o referencial de repouso da luz, já que esta se move com velocidade c em relação a todos os referenciais inerciais. Assim, o termo <u>massa de repouso não faz sentido para a luz</u>.

Uma segunda partícula de massa nula é o <u>neutrino</u>. Experimentos realizados nas últimas décadas estabelecem, na verdade, um limite superior para a massa do neutrino da ordem de $6 eV/c^2$, mas não se excluem a possibilidade de ser nula, o que significaria que essas partículas se moveriam com velocidade da luz. Os resultados mais recentes, realizados em meados de 1998, com um detector Super-Kamiokande, no Japão, sugerem um limite inferior de $0{,}07 eV/c^2$, o que, se confirmado, significaria que os neutrinos se movem com velocidades ligeiramente inferior a da luz.

Uma terceira partícula de massa nula é o <u>gráviton</u>. Essas partículas são responsáveis pela "transmissão" das forças gravitacionais. Desempenha para a gravidade o mesmo papel que os fótons para o eletromagnetismo. Atualmente nenhum experimento mostrou ainda a existência dos grávitons.

Lista de Exercícios

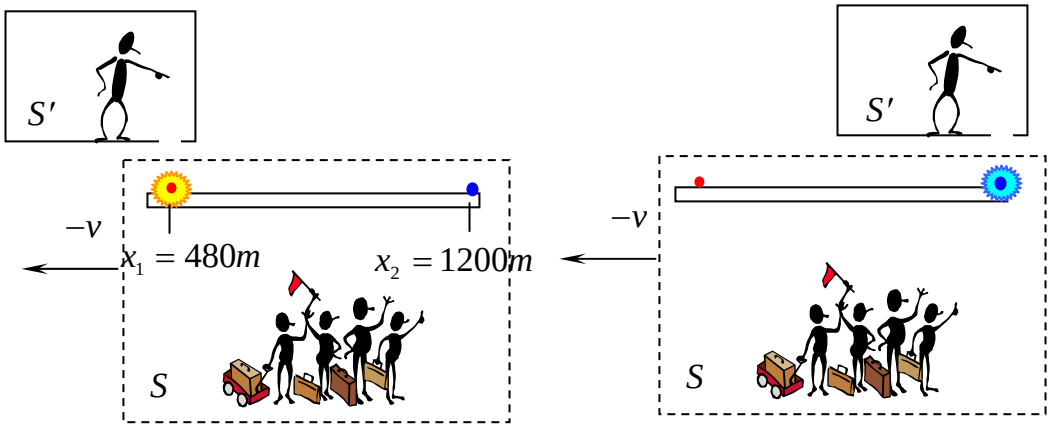
1- A vida média própria dos píons é $\tau' = 2.6 \times 10^{-8} s$. Se um feixe de píons tiver a velocidade de $v = 0.85c$, (a) qual seria o respectivo tempo de vida média τ medido no laboratório? (b) Qual a distância L que os píons percorreriam, em média, antes de decaírem? (c) Qual seria a sua resposta à indagação da parte (b) se você não levasse em conta a dilatação dos tempos? Resp.: (a) $\tau = 4.94 \times 10^{-8} s$, (b) $L = 12.6m$, (c) $L' = 6.63m$.

2- Uma nave espacial parte da terra em direção à alfa do Centauro, que está a 4 anos-luz de distância. A nave espacial desloca-se com a velocidade $v = 0.75c$. Quanto tempo leva a nave para chegar ao seu destino (a) no referencial da terra? (b) no referencial de um passageiro da nave? Resp. (a) $\Delta t = 5.33 anos$, (b) $\Delta t' = 3.53 anos$

3- Qual deve ser a velocidade v de um múon para que a sua vida média seja $\tau = 46 \mu s$, sabendo-se que a vida média em repouso é $\tau' = 2 \mu s$? Resp. $v = 0.9991c$

4- Qual deve ser a velocidade de uma vara de um metro, no referencial de um observador, para que o seu comprimento, medido pelo observador, seja $50cm$, quando a vara se move na direção do próprio eixo? Resp.: $2.6 \times 10^8 m/s$.

5- Observadores num referencial *S* vêm uma explosão localizada em $x_1 = 480m$. Uma segunda explosão ocorre $\Delta t = 5 \mu s$ depois, em $x_2 = 1200m$. Num referencial *S'*, que se move sobre o eixo dos $+x$, com velocidade v para a direita, um observador nota que as explosões ocorrem num mesmo ponto do espaço. Evidentemente, para ele é o referencial S que se move para a esquerda com uma velocidade $-v$ como mostra a figura abaixo. Qual a separação, no tempo $\Delta t'$, entre as duas explosões, no referencial *S'*? Resp.: $\Delta t' = 4.39 \mu s$.



6- Os aviões supersônicos a jato têm velocidades máximas da ordem de $3 \times 10^{-6} c$. (a) Qual a contração percentual do comprimento $\Delta L\%$ de um jato que estiver com esta velocidade, visto num referencial ligado à terra? (b) Durante um intervalo de tempo de $1 ano = 3.15 \times 10^7 s$, marcado num relógio na terra,, quantos minutos $\Delta T = \Delta t - \Delta t'$ perde o relógio do piloto em cada ano do relógio da terra? (Sugestão: Defina contração percentual relativa como $\Delta L\% = \left(\frac{L' - L}{L'} \right) \times 100$, e observe que nesse caso $v << c$ e portanto, $\frac{1}{\gamma} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{1/2} \cong 1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}$). Resp.: (a) $\Delta L\% = 4.5 \times 10^{-10}\%$, (b) $\Delta T = 2.37 \times 10^{-6}$ *min*

7- Um relógio está num satélite em órbita terrestre, com um período de $T = 90\,min$ .Considerando o raio da Terra $R_T = 6.37 \times 10^6 m$ e a velocidade do satélite $v = \frac{2\pi}{T} R_T$, qual é o intervalo de período ΔT que mede a diferença entre a leitura deste relógio e a de um outro, idêntico a ele, que ficou na Terra, depois de um intervalo de tempo $\Delta t = 1ano = 3.16 \times 10^7 s$? .(Sugestão: Observe que nesse caso $v << c$ e portanto, $\frac{1}{\gamma} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} \cong 1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}$). Resp.: $\Delta T \approx 9.64ms$.

8- Uma estudante, na Terra, ouve num rádio uma gravação que parece estar sendo tocada num disco que gira muito depressa. A gravação é de um disco que sendo tocado por uma emissora de uma nave espacial, que se aproxima da terra com a velocidade v. Tendo um disco de 33 rpm, da mesma gravação, a estudante observa que o som é o mesmo que o do seu disco tocado a 78 rpm, isto é, a razão entre a freqüência de aproximação ν_{ap} e a freqüência emitida ν' é dada por $78/33$. Qual deve será a velocidade da nave? Resp.: $v = 0.696c$.

9- Uma galáxia distante se afasta da Terra com a velocidade $v = 1.85 \times 10^7 m/s$. Calcular o deslocamento relativo para o vermelho $\frac{(\lambda_{af} - \lambda')}{\lambda'}$ na luz proveniente da galáxia. Resp.: 0.0637.

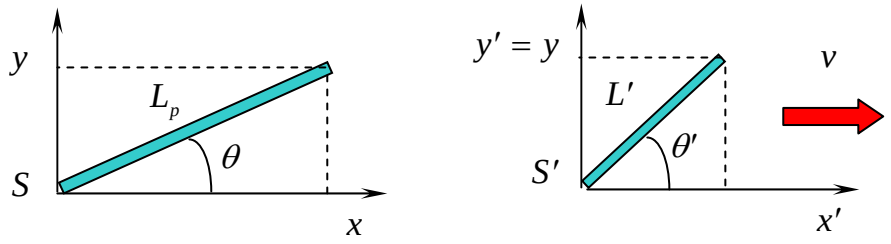
10- A luz do sódio, de comprimento de onda $\lambda' = 589nm$, está sendo emitida por uma fonte que se afasta da terra com a velocidade v. Qual deve ser o valor desta velocidade, se o comprimento de onda medido no referencial da terra é $\lambda_{af} = 620nm$. Resp.: $v = 0.0512c$.

11- Um amigo seu, que tem a mesma idade, viaja para a alfa do centauro, que está a $L' = 4anos.luz = 4c.anos$ de distância, e retorna imediatamente. Ao voltar seu amigo assegura que a viagem toda durou exatamente $\Delta t = 6anos$. Qual a velocidade v com que viajou? (Sugestão: Note que para o seu amigo é a terra que se move como velocidade $-v$). Resp.: $v = 0.8c$.

12- Uma nave espacial desloca-se da terra para um sistema estelar à distância de $L' = 12c.anos$ (medida no referencial da terra). A viagem leva um tempo $\Delta t = 15anos$, no referencial da nave. (a) Qual a velocidade v da nave em relação à terra? (b) Quando a nave chega ao seu destino, envia um sinal para a terra. Quantos anos se passam até que a terra receba este sinal? (Sugestão: Note também aqui que para a nave é a terra que se move como velocidade $-v$, e considere a duração da viagem da nave no referencial da terra no cálculo do tempo total para o sinal chegar a terra). Resp.: (a) $v = 0.625c$, (b) $T = \Delta t' + 12anos = 31.2anos$.

13- Duas naves espaciais estão se aproximando uma da outra. (a) Se a velocidade de cada uma delas for 0,6c, em relação à Terra, qual é a velocidade de uma em relação à outra? (b) Se a velocidade de cada uma delas em relação à Terra for 30.000 m/s (cerca de 100 vezes a velocidade do som), qual a velocidade de uma em relação à outra? Resp.: (a) $u_x = -0{,}882c$, (b) $u_x \approx -60000 - 6 \times 10^{-4} m/s$.

14- Uma vara, de comprimento próprio L_p, faz o ângulo θ com o eixo dos x, num referencial S como mostra a figura abaixo. Mostrar que o angulo θ' que a vara faz com o eixo dos x' num outro referencial S', que se move com a velocidade v sobre o eixo dos x em S, é dado por $tg\theta' = \gamma tg\theta$ e que o comprimento da vara, em S' é , $L' = L_p \sqrt{\frac{1}{\gamma^2} cos^2\theta + sen^2\theta}$.



15- A equação da frente de onda esférica de um pulso de luz que principia na origem, no instante $t = 0$ é $x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 = 0$. Usando a transformação de Lorentz, mostrar que este pulso de luz também tem uma frente de onda esférica no referencial S' pois, neste referencial, $x'^2 + y'^2 + z'^2 - (ct')^2 = 0$.

16- Dois eventos em S estão separados pela distancia $D = x_2 - x_1$ e pelo intervalo de tempo $T = t_2 - t_1$. (a)Usar a transformação de Lorentz pare mostrar que no referencial S', que se move com a velocidade V em S, a separação no tempo é $t_2' - t_1' = \gamma\left(T - \frac{vD}{c^2}\right)$. (b) Mostrar que os eventos podem ser simultâneos no referencial S' somente se D for maior que cT. (c) Se um dos eventos for a causa do outro, a separação D deve ser menor que cT pois D/c é o menor tempo que um sinal leva para percorrer a distancia entre x_1 e x_2 no referencial S. Mostrar que se D for menor que cT, então t'_2 é maior que t'_1 em todos os reverenciais. Isto mostra que se uma causa precede o seu efeito, num certo referencial, a mesma causa precederá o seu efeito em todos os outros reverenciais. (d) Suponhamos que um sinal pudesse ser enviado com velocidade $c' > c$, de modo que no referencial S a causa precedesse o efeito pelo tempo $T = D/c'$. Mostrar que há então um referencial que se move com a velocidade v menor que c no qual o efeito precede a causa.

17- Um amigo da sua idade viaja para Alfa do Centauro, a 4 anos-luz de distância, e volta imediatamente. Ele afirma que a viagem durou apenas 6 anos. (a) Com que velocidade seu amigo viajou? (b) Qual a diferença de idade entre vocês dois quando voltaram a se encontrar? (c) Desenhe um diagrama espaço - tempo para confirmar as respostas dos itens (a) e (b).

18- No referencial S, o evento B ocorre $2\mu s$ depois do evento A e a uma distância $\Delta x = 1{,}5km$ deste evento. (a) Qual deve ser a velocidade de um observador no sentido positivo do eixo x para que os dois eventos ocorram simultaneamente? (b) É possível que o evento B preceda o evento A para algum observador? (c) Desenhe um diagrama espaço – tempo que ilustre as respostas aos itens (a) e (b). (d) Determine o valor do intervalo no espaço – tempo e a distância própria entre os eventos.

19- Os referenciais S e S´ estão se movendo com os eixos x e x´ paralelos. Seus relógios são ajustados para $t = t' = 0$ no momento em que as origens dos dois referenciais coincidem .No referencial S, o evento 1 ocorre em $x_1 = 1ano - luz$ e $t_1 = 1ano$ e o evento 2 ocorre em $x_2 = 2anos - luz$ e $t_2 = 0{,}5anos$. Estes eventos ocorrem simultaneamente no referencial S´. (a) Mostre esses eventos num diagrama espaço - tempo (b) Determine o módulo e direção da velocidade em S´ em relação a S. (c) Em que instante estes eventos ocorrem no referencial S´? (d) Calcule o intervalo no espaço – tempo Δs entre os eventos. (e) O intervalo é do tipo espacial, temporal ou luminoso? (f) Qual é a distância própria L_p entre os eventos?

20- Um elétron, com a energia em repouso 0,511 MeV, move-se com a velocidade u = 0,2c. Achar a energia total, a energia cinética e o momento. Resp.: (a) $E = 0{,}522\,MeV$, (b) $K = 0{,}0105\,Mev$, (c) $p = 0{,}104\,Mev/c$.

21- Um próton, com a energia em repouso de 938 MeV, tem a energia total 1400 MeV. (a) Qual a sua velocidade? (b) Qual o seu momento? Resp.: (a) $u = 0{,}74c$, (b) $p = 1034\,Mev/c$.

22- Qual a energia cinética *K* que seria necessária para acelerar uma partícula de massa m_0 desde o repouso até a velocidade de (a) *0,5c* (b) *0,9c* e (c) *0,99c*? Exprimir as respostas como múltiplos da energia de repouso. Resp.: (a) $K = 0{,}155E_0$, (b) $K = 1{,}294E_0$, (c) $K = 6{,}089E_0$.

23- Se a energia cinética *K* de uma partícula for igual à sua energia de repouso E_o , qual o erro que se comete em usar $p = p_0 = m_0 v$ como o seu momento? Resp.: $erro = 50\%$.

24- Qual o erro percentual que se comete tomando-se $\frac{1}{2}m_0 v^2$ como a energia cinética de uma partícula quando a sua velocidade for (a) $v = 0{,}1c$ e (b) $v = 0{,}9c$. Resp.: (a) $erro = 0{,}751\%$, (b) $erro = 68{,}7\%$.

25- O sol irradia energia à taxa de $P=4\times10^{26}$ *W*, aproximadamente. Vamos admitir que esta energia seja originada por uma reação nuclear cujo resultado é a fusão de *4 núcleos* de *H* para formar um núcleo de *He*, com a libertação de $E_0 = 25MeV = 4\times10^{-12}\,J$ de energia por núcleo de *He* formado. Calcular o número $N = \Delta E/E_0 = P\Delta t/E_0$ de reações nucleares e a perda da massa em repouso $\Delta M_0 = Nm_0$, ocorridas no sol durante um dia, ou $\Delta t = 8{,}64\times10^4\,s$.

26- Uma partícula, que tem a massa em repouso de *1 MeV/c*^{2} e energia cinética *2 MeV*, colide com uma partícula estacionária de massa em repouso de *2 MeV/c*^{2}. Depois da colisão, as partículas ficam reunidas. Achar (a) a velocidade da primeira partícula antes da colisão, (b) a energia total da primeira partícula antes da colisão, (c) o momento total inicial do sistema, (d) a energia cinética total depois da colisão e (e) a massa em repouso do sistema depois da colisão. Resp.: (a) $u_1 = 0{,}943c$, (b) $E_1 = 3MeV$, (c) $p_1 = 2{,}83MeV/c$, (d) $M_0c^2 = 4{,}12\,MeV$, (e) $K_f = 0{,}88\,MeV$.

27- O raio da órbita de uma partícula carregada, num campo magnético, está relacionado com o momento da partícula por $p = BqR$. Esta equação vale classicamente com $p = mu$ e relativisticamente com $p = \frac{m_0 u}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$. Um elétron com a energia cinética $K = 1{,}50\,MeV$, se desloca sobre uma órbita circular perpendicular a um campo magnético uniforme $B = 5\times10^{-3}T$. (a) Achar o raio da órbita. (b) Qual o resultado que se obteria se fosse usada a relação clássica $p = mu$ e $K = p^2/2m$? Considere nos cálculos $e = 1{,}6\times10^{-19}C$, para a carga do elétron, $m_e = 9.1\times10^{-31}Kg$ para a massa do elétron e $E_0 = 0.511MeV$ para a energia de repouso do elétron. Resp.: $R = 1{,}3m$, (b) $R = 0{,}826m$.