Equação do quarto grau

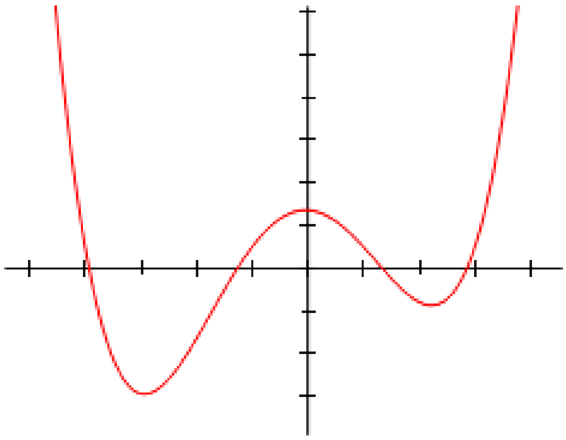

Gráfico de um polinômio do quarto grau, com quatro raízes reais distintas

Em matemática, uma **equação do quarto grau** é uma equação polinomial monovariável de grau quarto. A forma geral de uma equação do quarto grau é dada por:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0, \text{ com } a \neq 0.$$

Com $a \neq 0$, pois no contrário o polinômio seria de grau menor ou igual a três.

1 Exemplos

$x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24 = 0$

$x^4 - 1 = 0$

$x^4 - 5x^2 + 6 = 0$

2 Existência de soluções

O Teorema fundamental da álgebra, uma equação quártica terá sempre quatro soluções (raízes), simples ou múltiplas no conjunto dos números complexos.

3 Formas especiais

3.1 Equação biquadrática

Ver artigo principal: Equação biquadrada

Uma **equação biquadrática** é uma equação do quarto grau que, quando reduzida, é apresentada da seguinte forma:

$$px^4 + qx^2 + r = 0, \text{ como } p \neq 0$$

Esta equação pode ser reduzida a uma equação do segundo grau através seguinte mudança de variáveis:

$$py^2 + qy + r = 0, \text{ onde } y = x^2$$

Cujas raízes em y são descobertas pela Fórmula de Bhaskara: $y = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 - 4pr}}{2p}$,

$$\text{logo: } x = \pm\sqrt{\frac{-q + \sqrt{q^2-4pr}}{2p}} \text{ e } x = \pm\sqrt{\frac{-q - \sqrt{q^2-4pr}}{2p}}$$

3.2 Produtos Notáveis

Toda equação do 4° grau que, na forma reduzida $\left(x^4 + ax^2 + bx + c = 0\right)$, apresente coeficientes nulos, será um produto notável com as raízes em $x = -\dfrac{b}{4a}$.

- **Exemplo:** $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = 0$ quando reduzido fica na forma $z^4 = 0$, logo $x = -\dfrac{b}{4a}$ ou $x = 1$.

Formula de Wilson $x^4 = y^2$

4 O método de Ferrari

As soluções podem ser encontradas usando o **método de Ferrari** desenvolvido pelo matemático italiano Lodovico Ferrari.

Ferrari resolveu uma equação que, em linguagem moderna, pode ser escrita como:

$$x^4 + px^2 + q = rx$$

Nota-se que a equação geral $az^4 + bz^3 + cz^2 + dz + e = 0$ pode ser reduzida a este caso através da transformação $z = x - \frac{b}{4a}$, e dividindo a equação resultante por a.

A partir daqui, o método consiste em transformar a equação em uma diferença de quadrados tal qual $(x^2+A)^2-(Bx+C)^2=0$, cuja solução pode ser obtida através dos métodos de **resolução de equações do segundo grau.**

No primeiro passo, o primeiro membro da equação, x^4+px^2+q, é transformado no quadrado baseado em x^4+q, ou seja, $x^4+2\sqrt{q}x^2+q$:

$$x^4+q=rx-px^2$$

$$x^4+2\sqrt{q}x^2+q=(2\sqrt{q}-p)x^2+rx$$

$$(x^2+\sqrt{q})^2=rx+(2\sqrt{q}-p)\,x^2$$

Em seguida, somam-se termos em uma nova variável y , porém de forma a que o primeiro membro não deixe de ser um quadrado. Para isto, além de somar y^2 , devemos somar também $2y\cdot(x^2+\sqrt{q})$, ou seja:

$$(x^2+\sqrt{q})^2+2y\cdot(x^2+\sqrt{q})+y^2=$$

$$rx+(2\sqrt{q}-p)\,x^2+2y\cdot(x^2+\sqrt{q})+y^2$$

Reescrevendo:

$$(x^2+\sqrt{q}+y)^2=(2\sqrt{q}-p+2y)x^2+rx+2y\sqrt{q}+y^2$$

O segundo membro da equação pode ser reescrito como $(2\sqrt{q}-p+2y)\cdot(x-x_+)\cdot(x-x_-)$, onde x_+ e x_- são soluções da equação quadrática $(2\sqrt{q}-p+2y)x^2+rx+2y\sqrt{q}+y^2=0$, ou seja, $x=\dfrac{-r\pm\sqrt{r^2-4\cdot(2\sqrt{q}-p+2y)\cdot(2y\sqrt{q}+y^2)}}{2\cdot(2\sqrt{q}-p+2y)}$

Para que a equação se torne uma diferença de quadrados, é necessário que $(2\sqrt{q}-p+2y)\cdot(x-x_+)\cdot(x-x_-)$ seja um quadrado, então escreveremos que $x_+=x_-$, que necessita que a raiz quadrada na fórmula seja nula.

Em outras palavras, isto requer:

$$r^2-4\cdot(2\sqrt{q}-p+2y)\cdot(2y\sqrt{q}+y^2)=0$$

que, expandido, gera a equação do terceiro grau auxiliar:

> $8y^3+(24\sqrt{q}-4p)y^2+(16q-8p\sqrt{q})y-r^2=0$, onde apenas uma raíz y_1 é necessária (recomenda-se utilizar uma raiz real).

Retomando o cálculo da incógnita x, temos que $x_+=x_-=-\dfrac{r}{2\cdot(2\sqrt{q}-p+2y)}$

Com isso a equação $(x^2+\sqrt{q}+y)^2=(2\sqrt{q}-p+2y)\cdot\left(x+\dfrac{r}{2\cdot(2\sqrt{q}-p+2y)}\right)^2$, pode ser reescrita como $(x^2+\sqrt{q}+y)^2-\left(\sqrt{2\sqrt{q}-p+2y}\right)^2\cdot\left(x+\dfrac{r}{2\cdot(2\sqrt{q}-p+2y)}\right)^2=0$, ou $(x^2+\sqrt{q}+y)^2-\left(x\sqrt{2\sqrt{q}-p+2y}+\dfrac{r}{\sqrt{8\sqrt{q}-4p+8y}}\right)^2=0$

que resulta em uma diferença de dois quadrados:

$$x^2+\sqrt{q}+y\pm\left(x\sqrt{2\sqrt{q}-p+2y}+\frac{r}{\sqrt{8\sqrt{q}-4p+8y}}\right)=0$$

Que gera duas equações quadráticas que podem ser resolvidas pelos métodos de **resolução de equações de segundo grau** nas equações seguintes:

$$x^2+x\sqrt{2\sqrt{q}-p+2y}+\sqrt{q}+y+\frac{r}{\sqrt{8\sqrt{q}-4p+8y}}=0$$

$$x^2-x\sqrt{2\sqrt{q}-p+2y}+\sqrt{q}+y-\frac{r}{\sqrt{8\sqrt{q}-4p+8y}}=0$$

5 Fontes dos textos e imagens, contribuidores e licenças

5.1 Texto

- **Equação do quarto grau** *Fonte:* https://pt.wikipedia.org/wiki/Equa%C3%A7%C3%A3o_do_quarto_grau?oldid=46544524 *Contribuidores:* Rafael.afonso, Nuno Tavares, RobotQuistnix, Sturm, Lijealso, Salgueiro, He7d3r, Rei-bot, Escarbot, JAnDbot, Midas~ptwiki, Albmont, Bot-Schafter, Idioma-bot, TXiKiBoT, Aibot, SieBot, Lechatjaune, Orelhas, AlleborgoBot, MenoBot, Vmss, SilvonenBot, Luckas-bot, RuyLacerda, Salebot, ArthurBot, Xqbot, SassoBot, Homer Landskirty, Dinamik-bot, EmausBot, MerlIwBot, PauloEduardo, Dexbot, Prima.philosophia, Legobot, ReisDoCrime, AquilesH, Wilson paxeco e Anónimo: 22

5.2 Imagens

- **Ficheiro:E-to-the-i-pi.svg** *Fonte:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/3/35/E-to-the-i-pi.svg *Licença:* CC BY 2.5 *Contribuidores:* Sem fonte automaticamente legível. Presume-se que seja obra própria, baseando-se nas informações sobre direito autoral. *Artista original:* Sem fonte automaticamente legível. Presume-se que a autoria seja de Dermeister, baseando-se nas informações sobre direito autoral.
- **Ficheiro:Magnifying_glass_01.svg** *Fonte:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/3/3a/Magnifying_glass_01.svg *Licença:* CC0 *Contribuidores:* ? *Artista original:* ?
- **Ficheiro:Nuvola_apps_edu_mathematics-p.svg** *Fonte:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/c2/Nuvola_apps_edu_mathematics-p.svg *Licença:* GPL *Contribuidores:* Derivative of Image:Nuvola apps edu mathematics.png created by self *Artista original:* David Vignoni (original icon); Flamurai (SVG convertion)
- **Ficheiro:Polynomialdeg4.png** *Fonte:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/a1/Polynomialdeg4.png *Licença:* CC-BY-SA-3.0 *Contribuidores:* ? *Artista original:* ?
- **Ficheiro:Question_book.svg** *Fonte:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/9/97/Question_book.svg *Licença:* CC-BY-SA-3.0 *Contribuidores:* ? *Artista original:* ?
- **Ficheiro:Searchtool.svg** *Fonte:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/61/Searchtool.svg *Licença:* LGPL *Contribuidores:* http://ftp.gnome.org/pub/GNOME/sources/gnome-themes-extras/0.9/gnome-themes-extras-0.9.0.tar.gz *Artista original:* David Vignoni, Ysangkok

5.3 Licença