

NOTAS DE AULAS DE FÍSICA MODERNA

Prof. Carlos R. A. Lima

CAPÍTULO 2

RADIAÇÃO TÉRMICA E CORPO NEGRO

Primeira Edição – junho de 2005

CAPÍTULO 2 – RADIAÇÃO TÉRMICA E CORPO NEGRO

ÍNDICE

2.1- Introdução

2.2- Corpo Negro

2.3- Teoria Clássica da Radiação de Cavidade de Rayleigh - Jeans

2.4- Teoria de Planck da Radiação de Cavidade

Nessa apostila aparecem seções, sub-seções e exemplos resolvidos intitulados como **facultativos**. Os assuntos que se referem esses casos, podem ser dispensados pelo professor durante a exposição de aula sem prejuízo da continuidade do curso de Estrutura da Matéria. Entretanto, é desejável que os alunos leiam tais assuntos e discutam dúvidas com o professor fora do horário de aula. Fica a cargo do professor a cobrança ou não dos tópicos facultativos.

Excluindo os tópicos facultativos, esse capítulo deve ser abordado no máximo em **4 aulas de quatro créditos**.

CAPÍTULO 02

RADIAÇÃO TÉRMICA E CORPO NEGRO.

2.1. Introdução.

Um trabalho apresentado por Max Planck em 14 de dezembro de 1900, de título "Sobre a Teoria da Lei de Distribuição de Energia do Espectro Normal", onde concepções clássicas não estavam sendo verificadas, marcou o início de uma outra revolução na física. Esta data é considerada como sendo a do nascimento da física quântica. Como a relatividade, a física quântica não substitui a física clássica, mas se refere a uma generalização, que inclui as leis clássicas como casos especiais.

A radiação emitida por corpos aquecidos é denominada radiação térmica. A matéria em estado líquido ou sólido emite um espectro contínuo de radiação.

A temperatura normal, um corpo pode ser visto não por emissão mas por reflexão de luz. No entanto, as altas temperaturas os corpos podem emitir luz própria, embora mais de 90% esteja na região do infravermelho do espectro eletromagnético. Exemplos de corpos que radiam no visível são carvão em brasa, filamento de lâmpadas e estrelas. A relação entre a temperatura de um corpo e a frequência, ou cor, que emitem pode ser utilizada como um espectrômetro contínuo como pirômetro óptico. Com um instrumento, como este é possível estimar a temperatura de um corpo aquecido, como por exemplo uma estrela distante, observando simplesmente a cor, ou a distribuição de frequências, da radiação térmica por ela emitida.

2.2. Corpo Negro.

Em geral, o espectro da radiação térmica emitido por um corpo aquecido depende da sua composição. Entretanto, a experiência mostra que é possível idealizar um corpo aquecido que emite espectro térmico de caráter universal. Trata-se do chamado "corpo negro", que são corpos cuja superfície absorve toda a radiação térmica incidente sobre eles. Todos os corpos negros, à mesma temperatura, emitem radiação térmica de mesmo espectro.

Um corpo negro pode ser representado, convenientemente, por uma cavidade dotada de um pequeno orifício, como mostra a fig. 2.1. Praticamente, toda a radiação vinda do exterior que passa pelo orifício, entra na cavidade, dificilmente consegue sair dela, e termina por ser absorvida. Assim, este orifício se comporta como se fosse um corpo negro. Após absorver toda a radiação o orifício da cavidade passa a emitir um espectro de corpo negro.

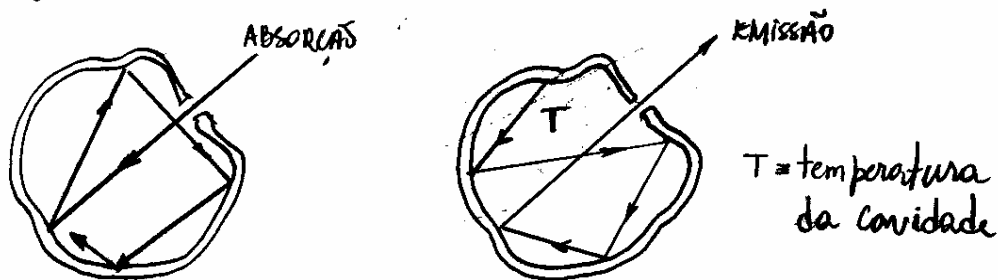


Fig. 2.1. Cavidade com um pequeno orifício que se comporta como um corpo negro.

O parâmetro utilizado para descrever a distribuição espectral da radiação de um corpo negro, a uma dada temperatura absoluta T , é a radiância R_T , que se refere a energia total radiada pelo objeto por unidade de área e tempo definida, por

$$R_T = \int_0^{\infty} R_T(\nu) d\nu \quad (2.1)$$

onde, $R_T(\nu)$ é a radiância por unidade de intervalo de frequência $d\nu$, denominado de radiância espectral, ed.

a distribuição de radiação de um corpo negro, definida de forma que $R_T(\nu)d\nu$ seja a energia emitida por unidade de área e tempo com frequências no intervalo entre ν e $\nu + d\nu$.

Em 1879, J. Stefan usando argumentos empíricos, demonstrados teoricamente mais tarde por Boltzmann, propõe que a radiação seja proporcional a quarta potência da temperatura, isto é

$$R_T = \sigma T^4 \quad (2.2)$$

onde, $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4$ é chamada de constante de Stefan-Boltzmann, e a relação (2.2) é conhecida como lei de Stefan-Boltzmann. A fig. 2.2 mostra a radiação espectral $R_T(\nu)$ de um corpo negro para diferentes temperaturas, obtida experimentalmente por Lummer e Pringsheim em 1899.

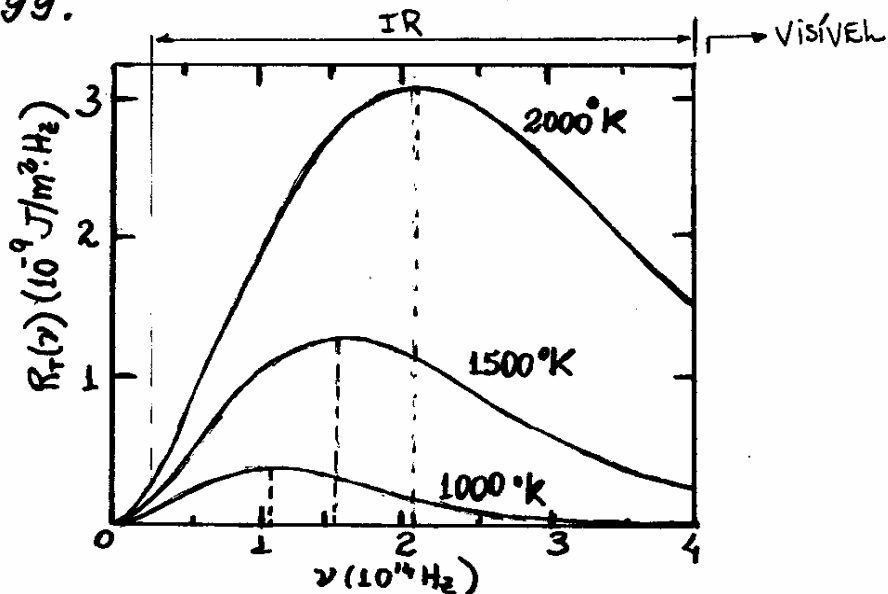


Fig. 2.2 - Radiação espectral de um corpo negro em função da frequência e temperatura.

A fig. 2.2 mostra que o espectro se desloca para as frequências máximas $\nu_{\text{máx}}$, à medida que a temperatura aumenta. Este comportamento é linear, isto é

$$\nu_{\text{máx}} \propto T \quad (2.4)$$

e já tinha sido demonstrado por W. Wien em 1893, usando argumentos da termodinâmica, e por isso ficou conhecido como lei do deslocamento de Wien.

A distribuição espectral da radiação de um corpo negro pode ser eventualmente descrita em termos de comprimentos de onda λ . A radiância R_T na eq. (2.1), pode ser escrita de fato nas duas formas seguintes:

$$R_T = \int_0^{\infty} R_T(\nu) d\nu = \int_0^{\infty} R_T(\lambda) d\lambda \quad (2.5)$$

A segunda integral $R_T(\lambda)$ descreve a radiância espectral, distribuída em comprimentos de onda. Podemos transformar uma integração sobre ν em uma integração sobre λ , utilizando-se a seguinte regra:

$$R_T = \int_0^{\infty} R_T(\nu) d\nu = \int_{\infty}^0 R_T(\nu) \frac{d\nu}{d\lambda} d\lambda = - \int_0^{\infty} R_T(\nu) \frac{d\nu}{d\lambda} d\lambda \quad (2.6)$$

Note que os limites de integração é invertido para acomodar a relação inversa entre ν e λ dada, por

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \quad (2.7)$$

Comparando-se as últimas integrais das eqs. (2.5) e (2.6), e notando que da eq. (2.7), $d\nu/d\lambda = -c/\lambda^2$, obtém-se

$$R_T(\lambda) = -R_T(\nu) \frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{c}{\lambda^2} R_T(\nu) \quad (2.8)$$

Note que a dependência de $R_T(\lambda)$ com λ , não é o mesmo que a dependência de $R_T(\nu)$ com ν . Em particular, a lei do deslocamento de Wien, dada pela eq. (2.4), pode ser rescrita, utilizando-se $\nu_{\max} = c/\lambda_{\max}$, como

$$\lambda_{\max} \propto \frac{1}{T} \quad (2.9)$$

ou seja, para os valores de λ para máximos de radiação, diminui com o aumento da temperatura. A constante de proporcionalidade na eq. (2.9), conhecida como constante de Wien, foi determinada experimentalmente, e vale

$$\lambda_{\max} T = 2,898 \times 10^{-3} \text{ m.K} \quad (2.10)$$

Exemplo 2.1

Supondo-se que as superfícies das estrelas se comportem como corpos negros, pode-se obter uma boa estimativa de suas temperaturas, medindo-se λ_{\max} .

Para o sol, $\lambda_{\max} = 5100 \text{ \AA}$, enquanto que para a estrela do norte (Estrela Polar), $\lambda_{\max} = 3500 \text{ \AA}$.

(a) Achar a temperatura da superfície dessas estrelas e, (b) determinar a radiação dessas estrelas.

(a) De acordo com a lei de deslocamento de Wien,

$$\lambda_{\max} T = 2,898 \times 10^{-3} \text{ mK.}$$

Para o sol, $\lambda_{\max} = 5100 \text{ \AA} = 5,1 \times 10^{-7} \text{ m}$, logo,

$$5,1 \times 10^{-7} \times T = 2,898 \times 10^{-3} \Rightarrow \boxed{T = 5700 \text{ K}}$$

Para a estrela polar, $\lambda_{\max} = 3500 \text{ \AA} = 3,5 \times 10^{-7} \text{ m}$, logo,

$$3,5 \times 10^{-7} \times T = 2,898 \times 10^{-3} \Rightarrow \boxed{T = 8300 \text{ K}}$$

Ocorre que, pelo fato da estrela polar emitir mais no ultravioleta, ela é mais quente do que o sol. O sol emite mais intensamente na região visível do espectro, sugerindo que, durante a evolução humana, nossos olhos tornaram-se mais sensíveis aos comprimentos de onda desta região do espectro.

(b) Pela lei de Stefan-Boltzmann, $R_T = \sigma T^4$, assim.

para o sol,

$$R_T = 5,67 \times 10^{-8} \times (5700)^4 \Rightarrow R_T = 5,9 \times 10^7 \text{ W/m}^2$$

ou,

$$R_T \approx 6000 \text{ W/cm}^2$$

Para a estrela da norte,

$$R_T = 5,67 \times 10^{-8} \times (8300)^4 \Rightarrow R_T = 2,71 \times 10^8 \text{ W/m}^2$$

ou,

$$R_T \approx 27000 \text{ W/cm}^2$$

2.3 - Teoria Clássica da radiação de cavidade de Rayleigh-Jeans.

No início do século XX, Rayleigh e Jeans, utilizaram a teoria clássica para estudar a densidade de energia da radiação de cavidade, ou de corpo negro, que resultou em pequenas divergências com resultados experimentais. Estas divergências revelam-se como um dos fatos históricos mais importantes para o nascimento da teoria quântica. Nesta seção, vamos apresentar os cálculos feitos por Rayleigh e Jeans e discutir as divergências observadas. Na seção seguinte, discutiremos a teoria de Planck para a radiação de cavidade, que introduziu a quantização da energia.

Se as paredes internas da cavidade da fig. 2.1 estiverem uniformemente aquecidas a uma temperatura T , o orifício atua como um emissor de radiação, como mostra a fig. 2.3.

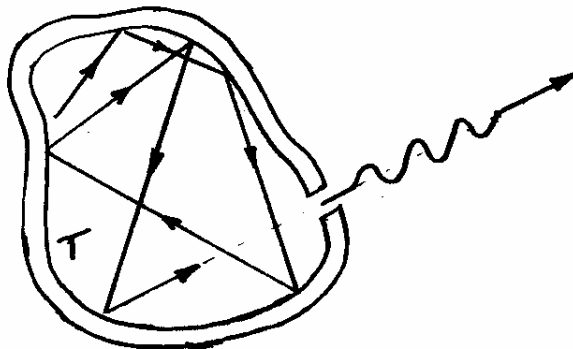


Fig. 2.3 - Cavidade uniformemente aquecida emissora de radiação.

Como o orifício tem propriedades de uma superfície de corpo negro, a radiação emitida por ele deve também ter um espectro de corpo negro. O espectro emitido pelo orifício na cavidade será especificado também por uma radiância espectral $R_T(\nu)$. No entanto, é mais útil, especificar o espectro da radiação dentro da cavidade, conhecida como radiação de cavidade, em termos de uma densidade de energia $\rho_T(\nu)$. Evidentemente, essas quantidades são proporcionais entre si.

A relação entre a radiância R_T e a densidade de energia ρ_T , pode ser encontrada com a ajuda de uma esfera imaginária com o orifício da cavidade em sua superfície, como mostra a fig. 2.4.

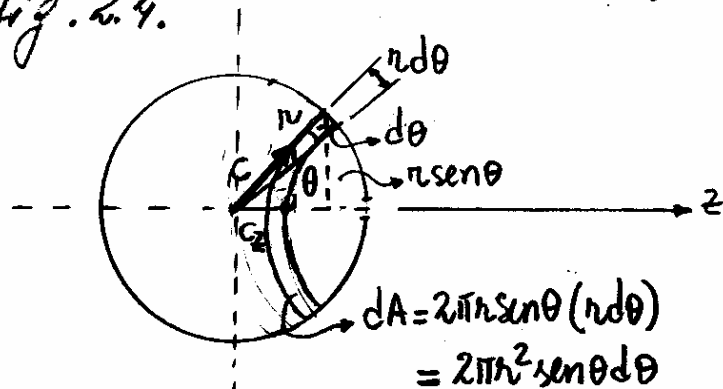


Fig. 2.4. Esfera imaginária com orifício da cavidade.

Deve-se notar que, como somente um dos hemisférios contém o orifício, então num intervalo de tempo Δt , a energia radiada ΔE_r será metade da energia ΔE_c da cavidade. Além disso, somente radiação com velocidade $\langle C_z \rangle$ atravessam o furo. Evidentemente, a média $\langle C_z \rangle$ pode ser ponderada

em qualquer intervalo do hemisfério $[-\pi/2, \pi/2]$. Em particular, pode-se ponderá-la no octante $[0, \pi/2]$. Com essa consideração, obtém-se

$$R_T = \frac{\Delta E_R}{\Delta t} \frac{1}{\Delta A} \frac{\langle \Delta z \rangle}{\langle \Delta z \rangle} = \frac{1}{2} \langle C_z \rangle \frac{\Delta E_c}{\Delta V} = \frac{1}{2} \langle C_z \rangle P_T$$

Com, $\langle C_z \rangle$ ponderada na área da semi-esfera:

$$\langle C_z \rangle = \frac{\int_0^{\pi/2} C_z dA}{\int_0^{\pi/2} dA} = \frac{\int_0^{\pi/2} (c \cos \theta) 2\pi r^2 \sin \theta d\theta}{\int_0^{\pi/2} 2\pi r^2 \sin \theta d\theta} = \frac{2\pi r^2 c \int_1^0 x dx}{2\pi r^2 \int_1^0 dx} = \frac{c}{2}$$

onde, adotou-se a mudança de variável $x = \cos \theta$. Assim, a radiação e a densidade de energia na cavidade relacionam-se, por

$$R_T = c/4 P_T$$

ou, num intervalo de frequências entre ν e $\nu + d\nu$,

$$R_T(\nu) d\nu = c/4 P_T(\nu) d\nu \quad (2.11)$$

ou ainda, em termos de comprimento de onda,

$$R_T(\lambda) d\lambda = c/4 P_T(\lambda) d\lambda \quad (2.12)$$

pois, como $c = \lambda\nu$, $d\nu/d\lambda = -c/\lambda^2$, e portanto $d\nu$ é proporcional a $-d\lambda$. Pode-se considerar as paredes internas da cavidade perfeitamente condutora, tal que, os campos sejam confinados, e que a energia seja armazenada na forma de ondas eletromagnéticas estacionárias de modos discretos para qualquer frequência ν .

Podem-se determinar a densidade de energia espectral $\rho_f(\nu)d\nu$ num intervalo de frequência entre ν e $\nu+d\nu$, simplesmente contando o número de modos $D_\nu(\nu)d\nu$ no mesmo intervalo de frequência e multiplicando pela energia média $\langle E \rangle$ de cada modo:

$$\rho_f(\nu)d\nu = \frac{D_\nu(\nu)d\nu}{V} \langle E \rangle \quad (2.13)$$

onde V é o volume da cavidade. A função $D_\nu(\nu)$ define o número de modos ν contidos no intervalo de frequência $d\nu$ e, é denominada de densidade de estados eletromagnéticos.

Para simplificação matemática na determinação de $D_\nu(\nu)d\nu$, deve-se assumir que a forma da cavidade seja cúbica de dimensões L , como mostra a fig. 2.5. Nesse caso, as componentes dos campos elétrico \vec{E} e magnético \vec{B} , podem ser tratadas separadamente, por causa do paralelismo das paredes.

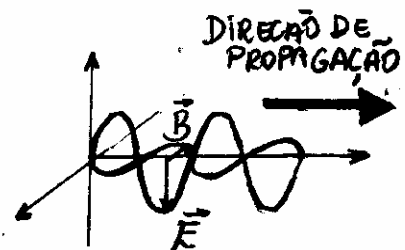
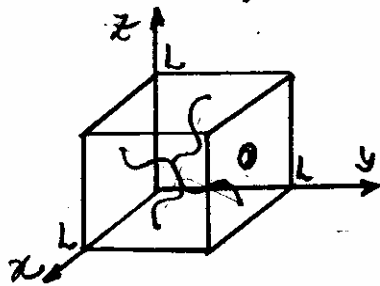


fig. 2.5 - Cavidade cúbica perfeitamente condutora.

A radiação eletromagnética é uma vibração transversal, com vetores \vec{E} e \vec{B} perpendiculares a direção de propagação, como também mostrado na fig. 2.5.

O comportamento espacial e temporal dos campos \vec{E} e \vec{B} é obtido por meio das equações de Maxwell. Entretanto, por causa da natureza vetorial desses campos, o tratamento matemático envolvido na solução geral do problema é bastante tedioso. Ao invés de fazê-lo, pode-se optar, inicialmente, por resolver uma situação hipotética simplificada, onde a cavidade seja unidimensional de comprimento L , de modo que a natureza vetorial dos campos possa ser ignorada. Uma vez resolvido este problema simples, pode-se generalizá-lo ao caso tridimensional utilizando-se argumentos geométricos. Ao longo do eixo x , os campos $E(x,t)$ e $B(x,t)$, devem satisfazer equações de onda, do tipo

$$\partial^2 E(x,t)/\partial x^2 = 1/c^2 \partial^2 E(x,t)/\partial t^2 \quad (2.14)$$

e uma similar para $B(x,t)$. Nesta equação $c = \lambda \nu$ é a velocidade da luz. A onda estacionária,

$$E(x,t) = E_0 [\sin(kx + \omega t) + \sin(kx - \omega t)] = E_0 \sin kx \cos \omega t \quad (2.15)$$

resultante da soma de uma onda que se move para a direita, $\sin(kx + \omega t)$ e uma que se move para a esquerda $\sin(kx - \omega t)$, é solução da eq. (2.14). Na eq. (2.15), $k = 2\pi/\lambda$ é o número de onda e $\omega = 2\pi\nu = k\lambda\nu = kc$ é a frequência angular. Note que o sinal de ω define o sentido de propagação da onda, uma vez que esta é proporcional a velocidade c . A identidade na eq. (2.15) pode ser verificada usando-se a relação trigonométrica:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \quad (2.16)$$

A eq. (2.15) descreve o comportamento de uma onda cuja amplitude varia senoidalmente, no espaço e no tempo, ao longo do eixo x e com frequência ν . Esse comportamento deve ser espacialmente localizado, como ondas estacionárias, exibindo nódos em $x=0$ e $x=L$. Para que o campo $E(x,t)$ seja nulo nesses pontos, de acordo com a eq. (2.15), $\sin(2\pi L/\lambda) = 0$, ou, $2\pi L/\lambda = n\pi$ onde, $n=0,1,2,\dots$, ou seja, o comprimento de onda λ deve assumir valores dados, por

$$\lambda = \frac{2L}{n} ; n=1,2,\dots \quad (2.17)$$

ou ainda, em termos de frequência

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{2L} n ; n=1,2,\dots \quad (2.18)$$

Esta condição determina um conjunto de valores possíveis de comprimentos de onda, ou frequências, que devem se propagar na cavidade unidimensional. A Fig. 2.6 mostra ondas estacionárias para $n=1,2,3$.

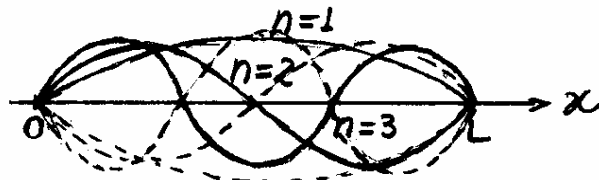


Fig. 2.6 - Ondas estacionárias para $n=1,2$ e 3 .

Um comportamento similar se obtém quando se considera as dimensões y e z individualmente, isto é, as radiações se propagam de modo que suas três componentes espaciais são ondas estacionárias.

Como na eq. (2.17), os comprimentos de onda associados a cada coordenada espacial, serão

$$\lambda_x = \frac{2L}{n_x} \quad ; \quad \lambda_y = \frac{2L}{n_y} \quad ; \quad \lambda_z = \frac{2L}{n_z} \quad (2.19)$$

onde, $n_x, n_y, n_z = 1, 2, \dots$. Estas componentes podem ser escritas em termos do comprimento de onda λ , como sugere a fig. 2.7

$$\cos \alpha = \frac{\lambda}{\lambda_x} \quad ; \quad \cos \beta = \frac{\lambda}{\lambda_y} \quad ; \quad \cos \gamma = \frac{\lambda}{\lambda_z} \quad (2.20)$$

que relacionadas com as eqs. (2.19), fornecem

$$\frac{2L}{\lambda} \cos \alpha = n_x \quad ; \quad \frac{2L}{\lambda} \cos \beta = n_y \quad ; \quad \frac{2L}{\lambda} \cos \gamma = n_z$$

Elevando-se ambas as membros destas equações ao quadrado e, em seguida somando-as, obtêm-se

$$\left(\frac{2L}{\lambda}\right)^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2$$

O segundo termo entre parênteses, define a soma dos co-senos diretores dada, por

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \quad (2.21)$$

e, então

$$\frac{2L}{\lambda} = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} \quad ; \quad n_x, n_y, n_z = 0, 1, 2, \dots \quad (2.22)$$

Para generalizar o problema ao caso tridimensional, deve-se considerar uma radiação de comprimento de onda λ , propagando-se numa direcção definida pelos três ângulos directores α, β e γ , como mostra a fig. 2.7. Obviamente, as radiações devem ser ondas estacionárias já que suas componentes espaciais o são, e, neste caso, os nodos são planos distanciados de $\lambda/2$.

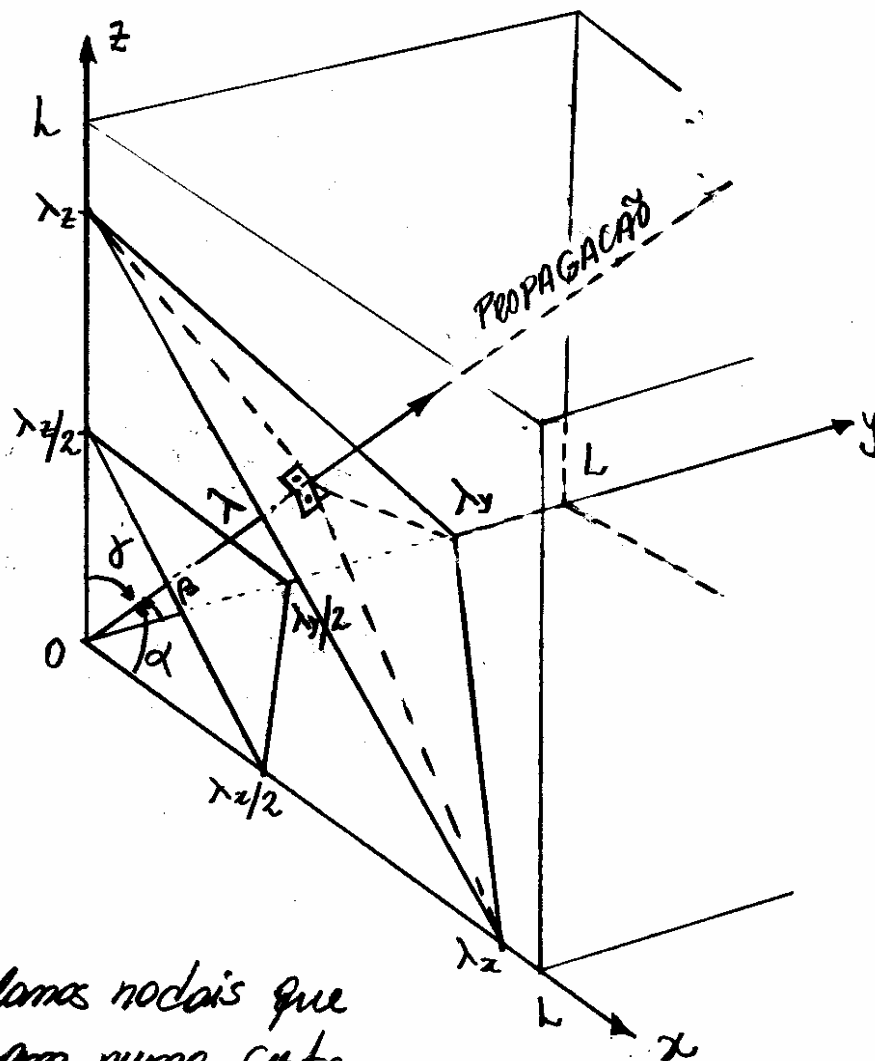


Fig. 2.7- Planos nodais que se propagam numa certa direcção na cavidade cúbica.

Em termos de frequência, a eq.(2.22) pode ser escrita como,

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{2L} \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} ; n_x, n_y, n_z = 1, 2, \dots (2.23)$$

Essas equações descrevem novamente um conjunto de valores possíveis de comprimento de onda e frequência, agora para o caso geral da cavidade cúbica condutora.

O passo seguinte é a contagem do número de modos $D_\nu(\nu) d\nu$, no intervalo de frequência entre ν e $\nu + d\nu$, construindo uma esfera de raio

$$r = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} \quad (2.24)$$

em coordenadas retangulares, tal que o conjunto de inteiros n_x, n_y e n_z definam pontos no interior de um octante do sistema de coordenadas (Fig.2.8), uma vez que n_x, n_y e $n_z > 0$.

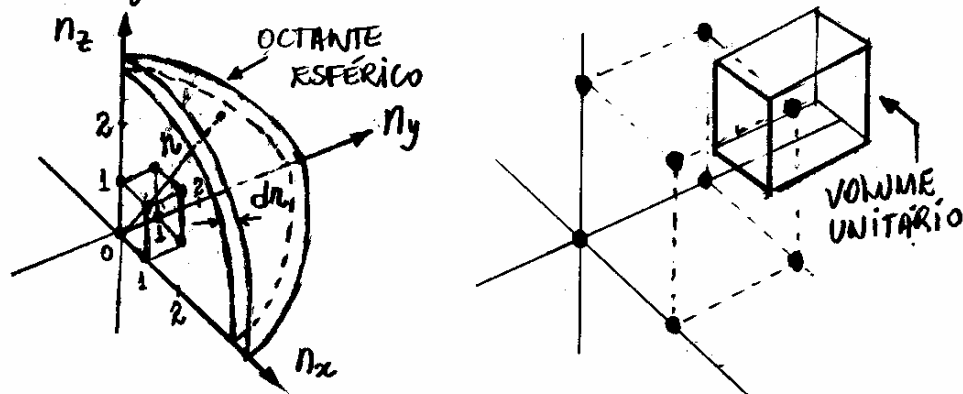


Fig.2.8 - Espaço (n_x, n_y, n_z) definindo um octante esférico de raio $r = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$

O volume total do octante esférico pode ser dividido em volumes unitários contendo, cada um, apenas um ponto (n_x, n_y, n_z) , tal que a densidade ρ de pontos, é

$$\rho = 1 \text{ ponto/unid. de Volume} \quad (2.25)$$

Cada ponto corresponde a uma frequência ν , que se relaciona ao raio r , de acordo com as eqs. (2.23) e (2.24), como

$$r = \frac{2L}{c} \nu \quad (2.26)$$

Assim, calcular o número de modos $D_\nu(\nu)d\nu$ entre ν e $\nu+d\nu$, é equivalente a calcular o número de pontos $D_r(r)dr$, contidos entre as cascas esféricas entre r e $r+dr$. O valor de $D_r(r)dr$ pode ser calculado simplesmente, multiplicando o volume da camada entre r e $r+dr$ pela densidade de pontos, isto é

$$D_\nu(\nu)d\nu = D_r(r)dr = \left(\frac{1}{8} 4\pi r^2\right) dr \rho = \frac{1}{2} \pi r^2 dr$$

pois, $\rho = 1$. Utilizando a eq. (2.26) e sua derivada, $dr = \frac{2L}{c} d\nu$, na equação anterior, obtém-se

$$D_\nu(\nu)d\nu = \frac{1}{2} \pi \left(\frac{2L}{c} \nu\right)^2 \left(\frac{2L}{c}\right) d\nu = \frac{4\pi}{c^3} \nu^2 V d\nu \quad (2.27)$$

onde, usou-se o volume da cavidade como, $V = L^3$.

Finalmente, deve-se multiplicar o resultado da eq. (2.27) por um fator 2, pois, para cada frequência possível ν , há, na verdade, duas ondas independentes correspondentes aos dois possíveis estados de polarização da radiação eletromagnética, que podem estar ou não em fase, isto é

$$D_{\nu}(\nu) d\nu = \frac{8\pi V}{c^3} \nu^2 d\nu \quad (2.28)$$

Apesar dos cálculos serem feitos para uma cavidade cúbica, não é difícil perceber que a densidade de estados eletromagnéticos $D_{\nu}(\nu)$ depende somente do volume da cavidade e não da sua forma. Combinando-se as eqs. (2.28) e (2.13), obtém-se

$$\rho_{\nu}(\nu) d\nu = \frac{8\pi \nu^2}{c^3} \langle E \rangle d\nu \quad (2.29)$$

Classicamente, as ondas estacionárias de frequência ν são geradas por oscilações de partículas carregadas das paredes da cavidade, como se fossem pequenos corpos presos a molas, mantidas em equilíbrio térmico a uma temperatura T .

Baseando-se no modelo clássico da teoria cinética dos gases, na qual um sistema de moléculas em equilíbrio térmico a uma temperatura T , o princípio da equipartição da energia, afirma que a energia cinética média de uma molécula por grau de liberdade, é

$$\frac{1}{2} kT$$

onde, $k = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$, é a constante de Boltzmann.

Pode-se aplicar este princípio à partículas oscilantes das paredes da cavidade desde que se considere também a energia potencial dessas partículas. No equilíbrio térmico, em média, as contribuições da energia cinética e potencial para a energia total, são iguais a $\frac{1}{2} kT$. Logo, nestas condições, a energia total média será kT . No nosso caso, as ondas estacionárias têm somente um grau de liberdade dada pela direção da oscilação das partículas, associadas às vibrações transversais do campo \vec{E} da onda estacionária. Conclui-se portanto que cada onda estacionária tem energia total média,

$$\langle E \rangle = kT \quad (2.30)$$

É importante notar que a energia total média tem o mesmo valor para todas as ondas estacionárias na cavidade, independentemente de suas frequências.

Substituindo-se a eq. (2.30) na eq. (2.29), obtém-se a densidade de energia no intervalo de frequências entre ν e $\nu + d\nu$, de acordo com previsões clássicas, como

$$\rho_T(\nu) d\nu = \frac{2\pi \nu^2 kT}{c^3} d\nu \quad (2.31)$$

Esta relação é conhecida como a fórmula de Rayleigh-Jeans para a radiação de corpo negro.

A Fig.2.9 mostra o comportamento da eq.(2.31), e o resultado experimental. A discordância é evidente. O espectro clássico se aproxima dos resultados experimentais, somente no limite de baixas frequências. A medida que a frequência cresce, o resultado teórico tende ao infinito.

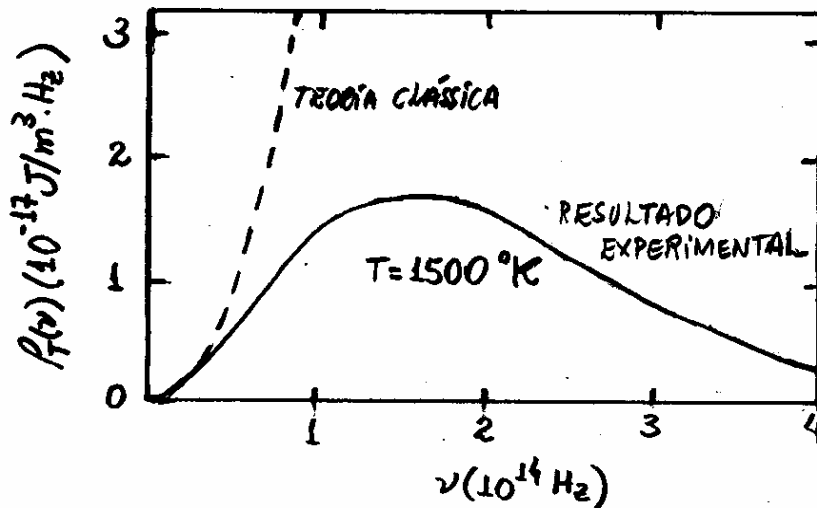


Fig.2.9 - Resultado teórico de Rayleigh-Jeans para a radiação de um corpo negro comparado com os resultados experimentais.

A tendência ao infinito para altas frequências na teoria de Rayleigh-Jeans, é conhecida como catástrofe do ultravioleta. A experiência mostra que, na realidade, a densidade de energia vai a zero para altas frequências.

O problema da radiação de cavidade foi resolvido por Planck, enunciando uma hipótese sobre a equipartição da energia até então desconhecida. Na seqüente discute-se essas ideias e suas importâncias para o surgimento da física quântica.

2.4 - Teoria de Planck da Radiação de Cavidade.

Na tentativa de solucionar a discordância entre a teoria clássica e a experiência, para a radiação de cavidade, Planck considerou uma hipótese que violava o princípio da equipartição da energia. Planck observou que o resultado experimental não reproduzido, quando,

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \langle E \rangle = kT \quad , \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \langle E \rangle = 0 \quad (2.32)$$

isto é, a energia total média tende a kT , como na teoria clássica, quando a frequência tende a zero, mas tende a zero quando a frequência tende ao infinito. Assim, Planck supôs que a energia média das ondas estacionárias seja uma função da frequência $\langle E \rangle = \langle E(\nu) \rangle$, contrariando o princípio da equipartição da energia.

O princípio da equipartição da energia, tem a sua origem na distribuição de Boltzmann para a teoria cinética clássica. A distribuição de Boltzmann dá a probabilidade de encontrar um sistema físico, em equilíbrio

térmico a uma temperatura T , com energia entre E e $E+dE$, escrita aqui sem demonstração, como

$$P(E) dE = \frac{e^{-E/kT}}{kT} dE \quad (2.33)$$

A energia média $\langle E \rangle$ pode ser calculada da distribuição de Boltzmann, por

$$\langle E \rangle = \frac{\int_0^{\infty} E P(E) dE}{\int_0^{\infty} P(E) dE} = \int_0^{\infty} E P(E) dE = \text{ÁREA} \quad (2.34)$$

O denominador dá a probabilidade de encontrar a entidade com qualquer energia, sendo portanto igual a unidade. A integral na eq. (2.34) pode ser calculada utilizando a eq. (2.33), e o resultado reproduz o princípio da equipartição da energia, isto é:

$$\langle E \rangle = kT \quad (2.35)$$

A eq. (2.34) mostra que $\langle E \rangle = kT$ é dada pela área abaixo do gráfico de $EP(E)$ em função de E , como mostra a fig. 2.10. A função $EP(E)$ foi obtida diretamente da eq. (2.33). O ponto de máximo desta função ocorre em $E = kT = \langle E \rangle$.

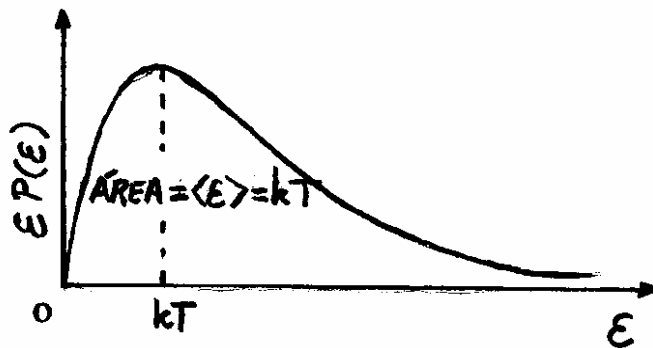


fig. 2.10 - Gráfico de $EP(E)$ em função de E .

A grande contribuição de Planck se deu quando ele descobriu que a condição $\lim_{E \rightarrow 0} \langle E \rangle = 0$, poderia ser alcançada, se fosse modificado o cálculo de $\langle E \rangle$ a partir de $P(E)dE$. Planck supôs que a energia E poderia ter apenas valores discretos, em vez de qualquer valor como utilizado na teoria clássica, e que, os valores discretos fossem uniformemente distribuídos, isto é

$$E = 0, \Delta E, 2\Delta E, 3\Delta E, \dots \quad (2.36)$$

neste caso, ΔE seria o intervalo constante entre os valores discretos da energia. Com a hipótese discreta da energia, as integrais na eq. (2.34), usadas para calcular $\langle E \rangle$, devem ser substituídas por somatórios, isto é

$$\langle E \rangle = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} E_n P(E_n)}{\sum_{n=0}^{\infty} P(E_n)} \quad (2.37)$$

A fig. 2.11 mostra cálculos gráficos de $\langle E \rangle$ a partir de $E P(E)$ para os casos, (a) $\Delta E \ll kT$; (b) $\Delta E \approx kT$ e (c) $\Delta E \gg kT$.

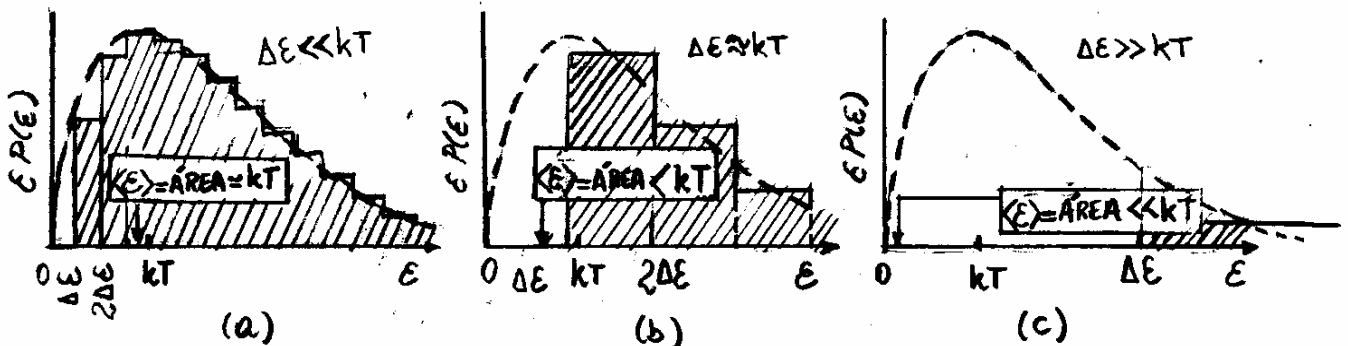


Fig. 2.11 - Comportamento gráfico de $\langle E \rangle$ de acordo com (2.37).

O valor de kT será a área abaixo da curva suave.
 Observe que quando $\Delta E \ll kT$, o valor de $\langle E \rangle \approx kT$,
 ou seja, praticamente igual ao resultado clássico.
 Entretanto, quando $\Delta E \approx kT$ ou, $\Delta E \gg kT$, o
 valor $\langle E \rangle$ será menor que kT , pois a redução
 da área definida pelos elementos discretos
 começa a tornar-se evidente, quando compara-
 da com área definida pelas elementos contínuos.
 Conclui-se então, que

$$\langle E \rangle \approx kT \quad \text{se, } \Delta E \text{ for pequeno}$$

e,

$$\langle E \rangle \approx 0 \quad \text{se, } \Delta E \text{ for grande}$$

Como Planck precisava obter o primeiro resulta-
 do para baixas frequência ν , e o segundo para
 altos valores de ν , então o valor ΔE deveria
 ser proporcional a ν , isto é

$$\Delta E = h\nu \quad (2.38)$$

onde h é a constante de proporcionalidade. Cálculos
 posteriores permitiram a Planck determinar o valor
 de h , ajustando resultados teóricos com dados experimen-
tais, obtendo

$$h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J.s} \quad (2.39)$$

Esta constante ficou conhecida como a constante
 de Planck.

Podem-se agora calcular a energia média utilizando-se as eqs. (2.37) e eq. (2.33), considerando-se, nessas fórmulas, a energia

$$E = nh\nu \quad ; \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.40)$$

isto é,

$$\langle E \rangle = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} E P(E)}{\sum_{n=0}^{\infty} P(E)} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nh\nu}{kT} e^{-nh\nu/kT}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{kT} e^{-nh\nu/kT}} = kT \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\alpha e^{-n\alpha}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha}}$$

onde,

$$\alpha = \frac{h\nu}{kT} \quad (2.41)$$

Podem-se notar, que

$$-\alpha \frac{d}{d\alpha} \ln \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha} = \frac{-\alpha \frac{d}{d\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha}} = \frac{-\sum_{n=0}^{\infty} \alpha \frac{d}{d\alpha} e^{-n\alpha}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha}} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\alpha e^{-n\alpha}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha}}$$

de forma, que

$$\langle E \rangle = kT \left(-\alpha \frac{d}{d\alpha} \ln \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha} \right) = -h\nu \frac{d}{d\alpha} \ln \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha}$$

onde usa-se o valor de α dado por (2.41). Mas,

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha} = 1 + e^{-\alpha} + e^{-2\alpha} + e^{-3\alpha} + \dots = 1 + X + X^2 + X^3 + \dots = (1-X)^{-1}$$

onde, $X = e^{-\alpha}$, de forma, que:

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= -h\nu \frac{d}{d\alpha} \ln(1-e^{-\alpha})^{-1} = \frac{-h\nu}{(1-e^{-\alpha})^{-1}} (-1)(1-e^{-\alpha})^{-2} e^{-\alpha} \\ &= \frac{h\nu e^{-\alpha}}{1-e^{-\alpha}} = \frac{h\nu}{e^{\alpha}-1} \end{aligned}$$

ou,

$$\langle E \rangle = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (2.42)$$

Substituindo-se a eq. (2.42) na eq. (2.29), obtém-se a densidade de energia no intervalo de frequências entre ν e $\nu+d\nu$, de acordo com a previsão quântica de Planck:

$$P_T(\nu)d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} d\nu \quad (2.43)$$

que descreve o espectro de corpo negro de Planck. Este resultado está em perfeita concordância com resultados experimentais.

Em muitos casos, é conveniente expressar o espectro de corpo negro de Planck em termos de comprimentos de onda λ em vez de frequência ν . Como $d\nu$ e $d\lambda$ tem sinais opostos, então

$$P_T(\lambda)d\lambda = -P_T(\nu)d\nu$$

ou,

$$P_T(\lambda) = -P_T(\nu) \frac{d\nu}{d\lambda} = P_T(\nu) \frac{c}{\lambda^2} \quad (2.44)$$

Pois, como $c = \lambda\nu$, $d\nu/d\lambda = -c/\lambda^2$.

Substituindo-se a eq. (2.43), sem $d\nu$, na eq. (2.44), em seguida escrevendo $\nu = c/\lambda$, e multiplicando-se ambos os lados por $d\lambda$, obtém-se

$$P_T(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{d\lambda}{e^{hc/\lambda kT} - 1} \quad (2.45)$$

A fig. 2.12 mostra gráficos do espectro de Planck em termos de comprimento de onda λ , para diferentes valores da temperatura T .

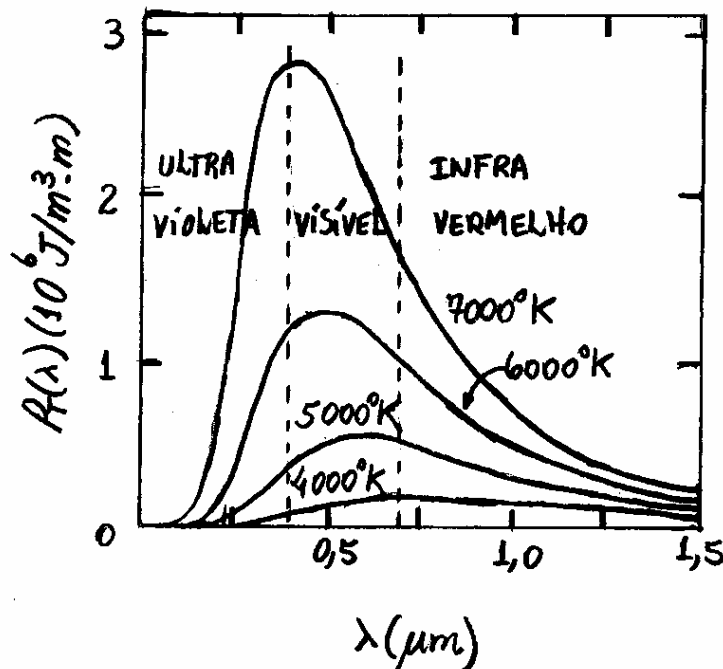


Fig. 2.12 - Espectro de corpo negro de acordo com Planck.

A mudança da "cor vermelha" para a "cor azul" da radiação térmica, à medida que a temperatura sobe, torna-se evidente na fig. 2.12, com o deslocamento dos máximos dos espectros para a esquerda.

A lei de Stefan-Boltzmann (eq.2.2), e a lei do deslocamento de Wien (eq.2.10), podem ser obtidas a partir da fórmula de Planck. A lei de Stefan-Boltzmann é obtida integrando-se a lei de Planck sobre todo o espectro de comprimentos de onda. A lei do deslocamento de Wien pode ser obtida, fazendo-se

$$\frac{dR(\lambda)}{d\lambda} = 0 \quad (2.46)$$

o resultado encontrado, deve ser

$$\lambda_{\text{máx}} T = \frac{hc}{4,965 k} \quad (2.47)$$

Identificando o lado direito desta equação com a constante de Wien, determinada experimentalmente como sendo $2,898 \times 10^{-3} \text{ m}^{\circ}\text{K}$, e utilizando $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$, pode-se encontrar uma relação entre h e k . Isto foi feito por Planck, e os resultados obtidos estão em ótima concordância com valores posteriormente encontrados por outros métodos.

Exemplo 2.2

Obtenha a lei de Stefan-Boltzmann a partir da fórmula de Planck da radiação de corpo negro.

A radiancia $R_T(\nu)$ e a densidade de energia $\rho_T(\nu)$, no intervalo de frequência entre ν e $\nu + d\nu$, é dada pela eq. (2.12), que relacionada com a fórmula de Planck (eq. 2.43), resulta, em

$$R_T(\nu)d\nu = \frac{c}{4} \rho_T(\nu)d\nu = \frac{2\pi h}{c^2} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1} d\nu$$

A radiancia total, será

$$R_T = \int_0^{\infty} R_T(\nu)d\nu = \frac{2\pi h}{c^2} \int_0^{\infty} \frac{\nu^3 d\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} = \frac{2\pi h}{c^2} \left(\frac{kT}{h}\right)^4 \int_0^{\infty} \frac{\alpha^3 d\alpha}{e^{\alpha} - 1}$$

onde, usa-se a mudança de variável:

$$\alpha = \frac{h\nu}{kT} \Rightarrow \nu = \frac{kT}{h} \alpha \Rightarrow d\nu = \frac{kT}{h} d\alpha$$

Recorrendo-se a uma tabela de integrais, encontra-se

$$\int_0^{\infty} \frac{\alpha^3 d\alpha}{e^{\alpha} - 1} = \frac{\pi^4}{15}$$

Assim,

$$R_T = \sigma T^4$$

onde,

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15h^3 c^2} = 5,676 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{ K}^4$$

que está em excelente concordância com o valor da constante obtida por Stefan e Boltzmann.

Lista de Exercícios

- 1- Um corpo negro tem que ser necessariamente negro? Explique o termo corpo negro.
- 2- Um pedaço de metal brilha com uma cor avermelhada a 1100 K. Entretanto, nessa mesma temperatura, um pedaço de quartzo não brilha. Explique este fato sabendo-se que, ao contrário do metal, o quartzo é transparente à luz visível.
- 3- Uma das primeiras tentativas de se explicar a distribuição espectral de um corpo negro foi feita por Rayleigh – Jeans, a partir de conceitos clássicos da termodinâmica. Em que região do espectro eletromagnético a lei de Rayleigh – Jeans não se verifica, e que fato ficou conhecido como catástrofe do ultravioleta?
- 4- Na tentativa de explicar os resultados experimentais observados no espectro de um corpo negro, Planck concluiu que o problema estava principalmente num conceito clássico da termodinâmica. Qual seria esse conceito, e que alteração foi sugerida por Planck ? Essa alteração invalida conceitos clássicos da termodinâmica, ou redefine esses conceitos de modo a incluir os casos clássicos como particulares? Explique.
- 5- Em muitos sistemas clássicos as frequências possíveis são quantizadas, tal como por exemplo a propagação de ondas sonoras num tubo ressonante. Nestes casos, a energia também é quantizada? Explique.
- 6- Em que comprimento de onda um radiador de cavidade a 6000 K irradia mais por unidade de comprimento de onda? Resp.: 4830 Å.
- 7- Um radiador de cavidade a 6000 K tem um orifício de 0,10 mm de diâmetro feito em sua parede. Ache a potência irradiada através do orifício no intervalo de comprimentos de onda entre 5500 Å a 5510 Å. Resp.: 7,53 W.
- 8- Em uma explosão termonuclear, a temperatura no centro da explosão é momentaneamente $10^7 K$. Ache o comprimento de onda para o qual a radiação emitida é máxima.
- 9- A uma dada temperatura, $\lambda_{\max} = 6500 \text{ Å}$ para uma cavidade de corpo negro. Qual será λ_{\max} se a taxa de emissão de radiação espectral for duplicada?
- 10- Faça uma estimativa para encontrar o comprimento de onda em que corpo humano emite sua radiação térmica máxima?
- 11- Utilizando a relação $P(\varepsilon) = \frac{e^{-\varepsilon/kT}}{kT}$ mostre que $\langle \varepsilon \rangle = \int_0^{\infty} \varepsilon P(\varepsilon) d\varepsilon = kT$.
- 12- Quando o sol está no zênite, a energia térmica incidente sobre a superfície da terra é cerca de $1,4 \times 10^6 \text{ ergs/cm}^2 \text{ s}$. O diâmetro do sol é da ordem de $1,6 \times 10^{11} \text{ cm}$ e a distância da terra ao sol é de aproximadamente $1,3 \times 10^{13} \text{ cm}$. Supondo que o sol irradie como um corpo negro, use a equação de Rayleigh-Jeans para estimar a temperatura na sua superfície.

13- Na determinação clássica da energia média total de cada modo da radiação no interior de uma cavidade ressonante, adotou-se a lei da equipartição da energia. De acordo com essa lei, moléculas de um gás que se movem em equilíbrio térmico a uma temperatura T , a energia cinética média por grau de liberdade da molécula é $\frac{1}{2}kT$. Essa lei poderia ser aplicada ao problema do corpo negro desde que se adotasse um modelo mecânico de oscilador harmônico para as partículas que compõem as paredes da cavidade, como se fossem pequenos sistemas massa – molas, de modo que a energia potencial também deveria ser incluída na determinação da energia total. A vibração dessas partículas, por consequência da temperatura, daria origem as vibrações dos campos elétricos associados as ondas eletromagnéticas transversais. Baseado nesse modelo mecânico, conclui-se que a energia média total por grau de liberdade deveria ser kT , isto é, o dobro da energia cinética média que se esperaria para cada partícula oscilante. Considerando-se que a energia total de um oscilador harmônico simples é $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$, onde k é a constante elástica da mola, m é a massa da partícula, v sua velocidade e $x = x_0 \cos\omega t$ sua posição em cada instante de tempo, mostre que essa energia total é o dobro da energia cinética média.

14- Obtenha a lei do deslocamento de Wien, $\lambda_{m\acute{a}x}T = 2,898 \times 10^{-3} K \times m$, a partir da função distribuição espectral de um corpo negro obtida por Planck $\rho_T(\lambda) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1}$. (Sugestão: faça a substituição de variável $x = \frac{hc}{\lambda kT}$, e reescreva a função distribuição na forma $\rho_T(\lambda) = \frac{2\pi(kT)^5}{h^4 c^3} g(x)$, onde $g(x) = \frac{x^5}{e^x - 1}$ descreve a forma universal do espectro de um corpo negro para qualquer temperatura. Encontre o valor $x_{m\acute{a}x}$ para o qual a função $g(x)$ é máxima, derivando-a em relação a x e igualando a zero. Use esse valor na equação $x_{m\acute{a}x} = \frac{hc}{\lambda_{m\acute{a}x} kT}$ e obtenha o resultado procurado).

15- Suponha que a radiação de uma cavidade de corpo negro a $5000K$ está sendo examinada através de um filtro passa banda de $\Delta\lambda = 2nm$ centrado no comprimento de onda $\lambda_{m\acute{a}x}$, do pico do espectro. Se o orifício da cavidade é um círculo de raio $r = 1cm$, encontre a potência P transmitida pelo filtro. (Sugestão: Usualmente, a potência irradiada seria calculada por $R_T = \int_{579nm}^{581nm} R_T(\lambda) d\lambda$ multiplicada pela área do orifício. Entretanto, $\Delta\lambda$ é pequeno o suficiente para permitir uma aproximação do tipo $R_T = \text{área abaixo da curva} \approx R_T(\lambda_{m\acute{a}x})\Delta\lambda$, em que $\lambda_{m\acute{a}x}$ pode ser calculado utilizando-se a lei do deslocamento de Wien). Resp.: $P \approx 25,3W$.