

NOTAS DE AULAS DE FÍSICA MODERNA

Prof. Carlos R. A. Lima

CAPÍTULO 3

PROPRIEDADES CORPUSCULARES DA RADIAÇÃO

Primeira Edição – junho de 2005

CAPÍTULO 3 – PROPRIEDADES CORPUSCULARES DA RADIAÇÃO

ÍNDICE

- 3.1- Efeito Fotoelétrico
- 3.2- Efeito Compton
- 3.3- Natureza Dual da Radiação
- 3.4- Produção de Raios X
- 3.5- Produção e Aniquilação de Pares

Nessa apostila aparecem seções, sub-seções e exemplos resolvidos intitulados como **facultativos**. Os assuntos que se referem esses casos, podem ser dispensados pelo professor durante a exposição de aula sem prejuízo da continuidade do curso de Estrutura da Matéria. Entretanto, é desejável que os alunos leiam tais assuntos e discutam dúvidas com o professor fora do horário de aula. Fica a cargo do professor a cobrança ou não dos tópicos facultativos.

Excluindo os tópicos facultativos, esse capítulo deve ser abordado no máximo em **4 aulas de quatro créditos**.

CAPÍTULO 03

PROPRIEDADES CORPUSCULARES DA RADIAÇÃO

A hipótese quântica de Planck foi um conceito radical e audacioso que, entretanto, ajudou a explicar várias fenômenos de interação da radiação com a matéria, até então ignorados. A perfeita harmonia entre esta hipótese e resultados observados, foi suficiente para justificar a quantização da energia como um novo princípio físico.

Neste capítulo, será considerado os processos de interação, espalhamento e absorção da radiação com a matéria. Em cada processo, obtêm-se evidências experimentais do comportamento corpuscular da radiação.

3.1 - Efeito Fotoelétrico

Um processo de emissão de cargas elétricas por uma superfície metálica foi descoberto por Hertz em 1887. A fig. 3.1 mostra um esquema da montagem utilizada por Hertz. Um cátodo C (emissor de cargas negativas) e um ânodo A (receptor de cargas negativas) são mantidos a uma diferença de potencial de alguns volts no vácuo.

Quando luz ultravioleta ($\nu \sim 10^{16} \text{ Hz}$), atinge o catodo C, é observado um fluxo de corrente elétrica através do anodo A. Esse fenômeno foi denominado de efeito fotoelétrico.

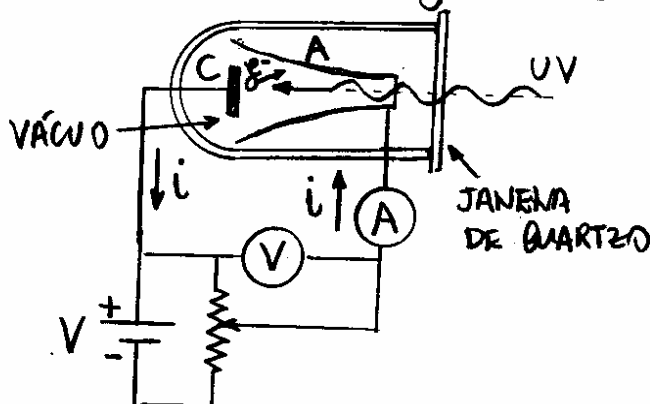


Fig. 3.1 - Experimento de Hertz para o efeito fotoelétrico.

A descoberta de Thomson da existência de elétrons em 1879, por meio da medida da razão e/m entre a carga e a massa de partículas num tubo de raios catódicos, sugeriu que as partículas carregadas negativamente do efeito fotoelétrico fossem elétrons. Esta hipótese foi confirmada em 1900 por Lenard, quando mediu a razão e/m das partículas fotoelétricas e mostrou que era a mesma que para os elétrons medida por Thomson.

A experiência de Lenard esclareceram dúvidas relativas à identidade das partículas fotoelétricas, entretanto mostraram também algumas propriedades do efeito fotoelétrico, muito difíceis de serem entendidas em termos das teorias da física clássica. Lenard mediu a corrente através do anodo A como função

da diferença de potencial aplicada entre os eletrodos para intensidades altas e baixas da luz incidente. O resultado é mostrado na fig. 3.2.

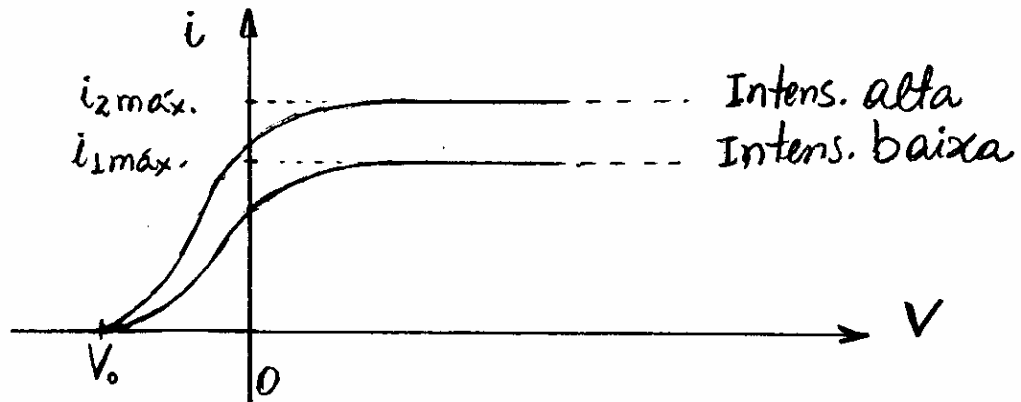


fig. 3.2 - Corrente fotoelétrica em função da diferença de potencial para diferentes intensidades.

A corrente fotoelétrica satura para valores altos da diferença de potencial V . Nessas condições, todos os fotoelétrons emitidos por C são coletados por A . Quando V é invertido ($V < 0$), o anodo torna-se negativo e repele os elétrons liberados pelo catodo, entretanto, a corrente fotoelétrica não cai imediatamente a zero como se esperaria. Este fato sugere que os elétrons sejam emitidos de C com alguma energia cinética. Alguns elétrons alcançam o anodo A , mesmo que o campo elétrico se oponha ao seu movimento. Quando a diferença de potencial atinge um valor V_0 , chamado de potencial frenador, a corrente fotoelétrica torna-se nula, independentemente do valor da intensidade.

Nesse momento, nenhum elétron, inclusive o mais rápido (de maior energia cinética), não alcança o anodo A. A energia cinética do elétron mais rápido $K_{\text{máx.}}$, se relaciona ao potencial frenador V_0 , por

$$K_{\text{máx.}} = eV_0 \quad (3.1)$$

A teoria ondulatória clássica afirma que a intensidade I de uma onda é proporcional ao quadrado do campo elétrico E ($I \propto E^2$). Como a força sobre um elétron é $\vec{F} = e\vec{E}$, isso sugere que a energia cinética K dos fotoelétrons seja proporcional a intensidade ($K \propto I$). Entretanto, a eq. (3.1), obtida da experiência, mostra que a energia cinética deve independe da intensidade da luz.

A fig. 3.3 mostra o comportamento do potencial frenador V_0 em função da frequência ν da luz incidente sobre uma superfície de sódio, obtida por Millikan em 1914.

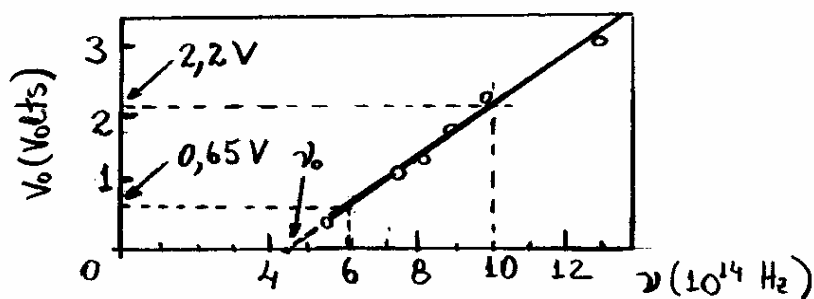


fig. 3.3 - Comportamento do potencial frenador em função da frequência da luz numa superfície de sódio.

Observe a presença de um limiar de frequência ν_0 abaixo do qual o efeito fotoelétrico deixa de ocorrer.

Pela teoria clássica, o efeito fotoelétrico deveria ocorrer para qualquer frequência da luz incidente, desde que a intensidade seja suficiente para ejetar os elétrons. Entretanto, o gráfico da fig. 3.3 mostra a existência de um limiar de frequência para o efeito fotoelétrico para qualquer que seja a intensidade da luz incidente. Este importante resultado experimental deu o prêmio Nobel a Millikan em 1923.

Uma outra importante divergência do efeito fotoelétrico com a teoria ondulatória clássica, ocorre com o tempo observado entre a incidência da luz e a ejeção do elétron.

Seja, por exemplo, uma placa de potássio a $R = 1$ metro de uma fonte luminosa pouco intensa, de potência igual a $P_0 = 1$ watt. Supõe-se que o elétron ejetado tenha sua energia absorvida numa área circular correspondente a um raio atômico $r \approx 10^{-10}$ metros. Se a fonte irradia isotropicamente, a potência incidente sobre o alvo será,

$$P_{\text{alvo}} = \frac{\pi r^2}{4\pi R^2} P_0 = \frac{\pi \times 10^{-20}}{4\pi \times 1^2} = 2,5 \times 10^{-21} \text{ J/s}$$

Se a energia necessária para remover um elétron da superfície do potássio é cerca de $\Delta E = 2,1 \text{ eV} = 3,4 \times 10^{-19}$ Joules, o tempo necessário para o elétron absorvê-la será,

$$\Delta t = \frac{\Delta E}{P_{\text{alvo}}} = \frac{3,4 \times 10^{-19}}{2,5 \times 10^{-21}} = 1,4 \times 10^2 \text{ s} \approx 2 \text{ minutos}$$

Assim, durante todo esse intervalo finito de tempo, o elétron deveria estar absorvendo energia da luz até seu escape. Entretanto, nenhum retardo foi jamais observado. De fato, experiências posteriores realizadas por Lawrence e Beams em 1928, usando uma fonte de luz várias ordens de grandeza menos intensa do que a considerada acima, mostraram um atraso menor que 10^{-9} segundos.

Em 1905, Einstein propõe a teoria quântica do efeito fotoelétrico. De acordo com a teoria quântica de Planck, partículas e campos eletromagnéticos oscilantes à frequência ν , podem mudar de energia somente por múltiplos inteiros da energia quântica $h\nu$. Einstein sugere que, no processo de ir de um estado de energia $n h\nu$ para outro $(n-1) h\nu$, a fonte emite uma porção de energia eletromagnética igual, a

$$E = h\nu \quad (3.2)$$

Einstein considerou que tal porção de energia emitida, estivesse localizada num pequeno volume do espaço, que se afasta da fonte com uma velocidade c . No processo fotoelétrico, um desses quanta de energia, ou fóton como ficou conhecido, seria absorvido completamente por um elétron do fotocátodo. Quando um elétron é emitido da superfície do metal, sua energia cinética será $K = h\nu - w$, onde $h\nu$ é a energia do fóton incidente e w é o trabalho necessário para remover o elétron do metal.

Alguns elétrons estão mais fortemente ligados do que outros. Alguns perdem energia por colisões na sua trajetória. No caso do elétron mais fracamente ligado, o fotoelêtron deve emergir com a energia cinética máxima K_{\max} , dada por,

$$K_{\max} = h\nu - w_0 \quad (3.3)$$

onde w_0 , uma energia característica do metal denominada de função trabalho, é a energia mínima necessária para um elétron atravessar o metal e escapar das forças atrativas responsáveis pela sua ligação ao metal.

Como se pode ver da eq. (3.3), a teoria quântica do efeito fotoelétrico concorda com a observação de Lenard de que, K_{\max} não depende da intensidade. Aumentar a intensidade da luz meramente aumenta o número de fótons e portanto a fotocorrente, entretanto, isto não altera a energia $h\nu$ de cada fóton.

O limiar de frequência ν_0 , observado por Millikan, é obtido também da eq. (3.3) tomando-se $K_{\max} = 0$, de modo que

$$h\nu_0 = w_0 \quad (3.4)$$

que significa que um fóton de frequência ν_0 tem exatamente a energia necessária para ejetar os fotoelétrons, sem sobra de energia cinética.

Se a frequência for menor que ν_0 , nenhum fotoelétron será ejetado, independentemente da intensidade (número de fótons) da luz incidente.

Finalmente, a emissão de um fotoelétron será imediata logo que este absorva um fóton da luz incidente. A energia é fornecida em pacotes concentrados, e não se espalha uniformemente sobre uma área extensa como supusemos no nosso exemplo com a teoria ondulatória clássica.

Relacionando-se a eq. (3.1) com a eq. (3.3), obtém-se

$$V_0 = (h/e) \nu - W_0/e \quad (3.5)$$

Portanto, a teoria de Einstein prevê uma relação linear entre V_0 e ν , concordando com o resultado experimental de Millikan mostrado na fig. 2.3. A inclinação (h/e) da reta, pode ser calculada diretamente no gráfico, fornecendo,

$$\frac{h}{e} = \frac{2,20 - 0,65}{10 \times 10^{14} - 6 \times 10^{14}} = 3,9 \times 10^{-15} \text{ V.s}$$

Usando o valor da carga do elétron, $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$, obtém-se um valor para a constante de Planck, dado por, $h = 6,2 \times 10^{-34} \text{ J.s}$.

De uma análise muito mais cuidadosa, realizada posteriormente usando superfícies de lítio, Millikan obteve um valor

$h = 6,57 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$, com uma precisão de aproximadamente 0,5%. Esta medida estava muito próxima do valor de h deduzida da fórmula da radiação de Planck. A concordância numérica de 'h', usando teorias completamente diferentes, era notável. Um valor atual de h , é $h = 6,626076 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s} = 4,135669 \times 10^{-15} \text{ eV}\cdot\text{s}$.

Em 1921 Einstein recebeu o Prêmio Nobel pela teoria quântica do efeito fotoelétrico. Antes que Millikan comprovasse experimentalmente a teoria de Einstein em 1914, Einstein tinha sido indicado para membro da Academia Prussiana de Ciências por Planck e outros.

Hoje a hipótese do fóton é usada em todo o espectro eletromagnético, não apenas na região visível. Com $\lambda = 10 \text{ cm}$, um comprimento de onda típico de microondas, pode-se calcular a energia do fóton para obter, $1,2 \times 10^{-5} \text{ eV}$. Por ser baixa, esta energia é incapaz de ejetar fotoelétrons de uma superfície metálica. Para raios X, ou raios γ , tais como os que são emitidos por núcleos radioativos, a energia do fóton pode ser de 10^6 eV , ou mais. Estes fótons podem retirar elétrons fortemente ligados em átomos extremamente pesados.

Exemplo 3.1 - Exemplo do Millikan

O lítio é um dos metais estudados por Milliken para comprovar a teoria de Einstein do efeito fotoelétrico. Esse metal tem uma função trabalho $w_0 = 2,42 \text{ eV}$. (a) Encontre o limiar fotoelétrico para uma radiação incidente neste metal. (b) Seja uma fonte de potência $P = 1 \text{ W}$ desta radiação a uma distância $R = 1 \text{ m}$ do lítio. Calcule o número de fótons por segundo, que atingem uma unidade de área da superfície do lítio.

(a) O limiar de frequência ν_c , ocorre quando $K_{\text{máx}} = 0$ na equação, $K_{\text{máx}} = h\nu - w_0$, ou seja

$$\nu_c = \frac{w_0}{h} = \frac{2,42 \text{ eV}}{4,14 \times 10^{-15} \text{ eV}\cdot\text{s}} \Rightarrow \boxed{\nu_c = 5,84 \times 10^{14} \text{ Hz}}$$

O comprimento de onda limiar λ_c será, então

$$\lambda_c = \frac{c}{\nu_c} = \frac{3 \times 10^8}{5,84 \times 10^{14}} \Rightarrow \boxed{\lambda_c = 514 \text{ nm}}$$

que está na região do visível (luz verde). Assim, qualquer comprimento de onda menor ou igual a este, deve ejetar fotoelétrons da superfície do lítio.

b) A energia por segundo por unidade de área que incide sobre a placa metálica a $R=1\text{m}$ de distância de uma fonte de luz de 1watt de potência, e a intensidade I naquele ponto e, é dada, por

$$I = \frac{P}{A} = \frac{P}{4\pi R^2} = \frac{1}{4\pi(1)^2} = 8 \times 10^{-2} \text{ J/m}^2 \cdot \text{s}$$

ou, em termos do e-letron-Volts ($1\text{J} = 1,6 \times 10^{19} \text{ eV}$),

$$I = 5 \times 10^{17} \text{ eV/m}^2 \cdot \text{s}$$

Se cada fóton tem uma energia igual a função trabalho do lítio ($w_0 = 2,42 \text{ eV}$), então, o número de fótons que atinge uma unidade de área do lítio por segundo, será

$$n_{\text{fótons}} = \frac{I}{w_0} = \frac{5 \times 10^{17}}{2,42}$$

$$\Rightarrow \boxed{n_{\text{fótons}} = 2,067 \times 10^{17} \text{ fótons/s} \cdot \text{m}^2}$$

Este exemplo mostra que a quantidade de fótons que atinge o metal é extremamente grande, mesmo que a intensidade da luz seja pequena. Isso explica a baixa granulosidade da radiação em fótons extremamente pequenos e, por conseguinte, difíceis de serem detectados.

3.2 - Efeito Compton

Em 1923, a natureza corpuscular da radiação foi definitivamente confirmada por Compton. A experiência de Compton, mostrada na fig. 3.4, consiste na incidência de um feixe de raios X de comprimento de onda λ_0 , sobre um alvo de grafite.

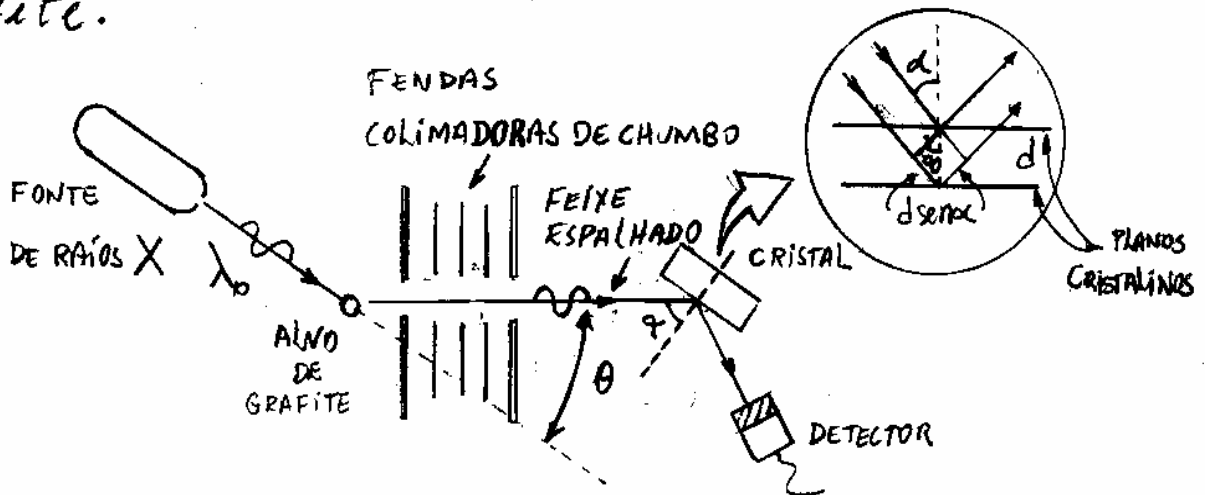


fig. 3.4 - Diagrama da experiência de Compton.

A função do cristal no experimento é a separação de possíveis comprimentos de onda diferentes no feixe espalhado, por meio de interferências construtivas, dada pela condição de Bragg, definida, por

$$\lambda = 2d \sin \alpha \quad (3.6)$$

onde d é a distância entre os planos cristalinos e α o ângulo do feixe em relação a normal à superfície do cristal, como evidenciado na fig. 3.4.

As intensidades dos raios X espalhados foram medidas como função dos comprimentos de onda, para vários ângulos θ de espalhamento. A fig. 3.5 mostra os resultados obtidos. Observa que, embora o feixe incidente consiste de um único comprimento de onda λ_0 , os raios X espalhados tem máximos de intensidades em dois comprimentos de onda. Um dos comprimentos de onda é o próprio λ_0 incidente, e o outro representado por λ_1 , é maior que λ_0 . Este fenômeno é conhecido como efeito Compton, e a quantidade $\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_0$ é denominada de deslocamento Compton. A fig. 3.5 mostra que $\Delta\lambda$ depende do ângulo θ , segundo o qual os raios X espalhados são observados.

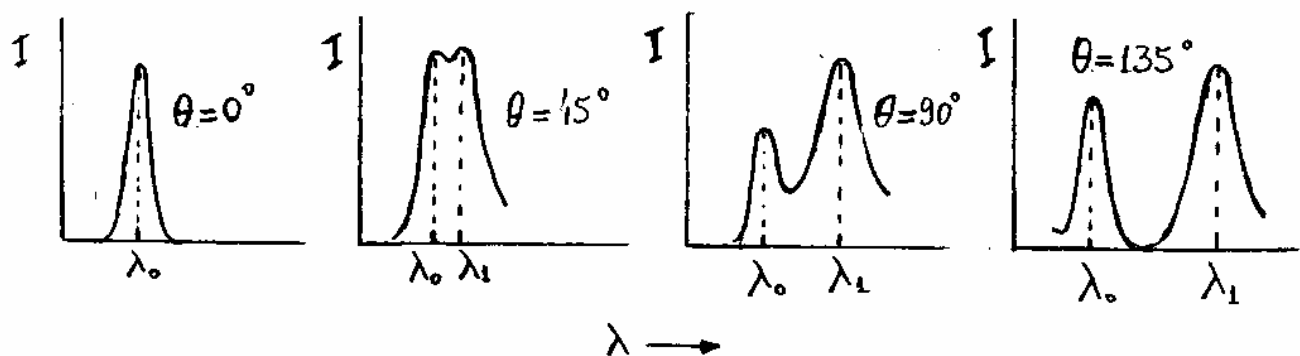


fig. 3.5 - Espectros obtidos no experimento de Compton.

A presença do comprimento de onda λ_1 não pode ser entendida se os raios X forem encarados como ondas eletromagnéticas clássicas. Classicamente, os elétrons livres do grafite oscilam com a mesma frequência ν da onda incidente. Esses elétrons, como qualquer carga, devem irradiar ondas eletromagnéticas com a mesma

frequência ν . Assim, no modelo clássico apenas um comprimento de onda deveria ser observado na onda espalhada.

Para explicar seus resultados experimentais, Compton supôs que o feixe de raios X incidente fosse um conjunto de fótons, cada um com energia,

$$E = h\nu \quad (3.7)$$

e que, esses fótons colidem com os elétrons livres do alvo da mesma forma que duas bolas de bilhar. Observe que os fótons são encarados como partículas, e não como ondas e, além disso, ao contrário do efeito fotoelétrico, eles são espalhados em vez de absorvidos.

Encarando o fóton como um pacote localizado de energia, vamos considera-lo como se fosse uma partícula de energia E e momento p .

Do ponto de vista relativístico, a energia total de uma partícula de massa de repouso m_0 e velocidade v , é dada, por

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = K + m_0 c^2 \quad (3.8)$$

Uma vez que a velocidade de um fóton é c , e sua energia $E = h\nu$, é finita, é evidente que a massa de repouso m_0 deve ser nula, para que E não tenda ao infinito quando $v \rightarrow c$.

Logo, o fóton pode ser considerado como uma partícula de massa de repouso zero e energia relativística total E , puramente cinética.

O momento do fóton pode ser calculado a partir da relação geral,

$$E^2 = p^2 c^2 + (m_0 c^2)^2 \quad (3.9)$$

Para o fóton, $m_0 = 0$ e, então

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} \quad (3.10)$$

onde, $\lambda = c/\nu$ é o comprimento de onda do fóton.

É interessante comentar aqui que a equação $p = E/c$ é também prevista pela teoria clássica de Maxwell da radiação eletromagnética. Entretanto, neste contexto, p e E representam respectivamente, o momento e a energia por unidade de volume e da radiação.

Considere então, a colisão entre um fóton e um elétron livre estacionário, como mostra a fig. 3.6.

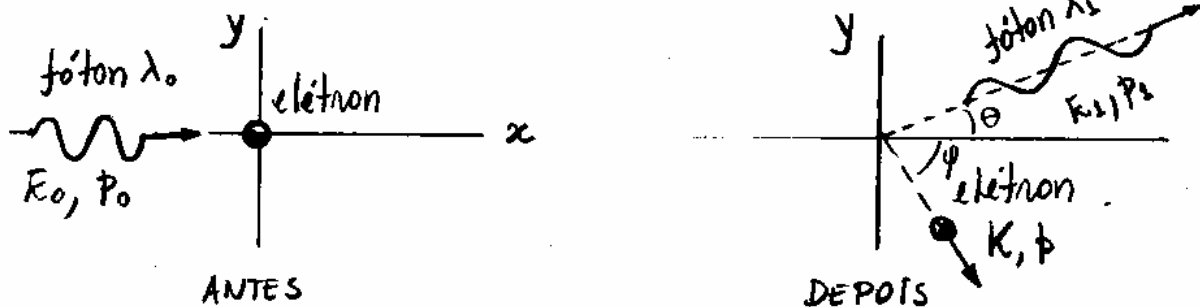


fig. 3.6 - Colisão de um fóton com um elétron livre.

Um fóton de energia total relativística E_0 e momento p_0 colide com o elétron de energia de repouso $m_0 c^2$. O fóton é então, espalhado de um ângulo θ e se afasta com energia total relativística E_1 e momento p_1 , enquanto que o elétron sofre um recuo, com energia cinética K e momento p , formando um ângulo φ com a direção horizontal. O uso de equações relativísticas a este problema é necessário uma vez que, tanto o fóton quanto o elétron se movimentam com velocidades relativísticas.

A conservação do momento requer, que

$$p_0 = p_1 \cos \theta + p \cos \varphi \Rightarrow p_0 - p_1 \cos \theta = p \cos \varphi$$

e,

$$p_1 \sin \theta = p \sin \varphi$$

Elevando-se essas equações ao quadrado e, em seguida, somando-as, obtêm-se

$$p_0^2 + p_1^2 - 2p_0 p_1 \cos \theta = p^2 \quad (3.11)$$

A conservação da energia total relativística requer, que

$$E_0 + m_0 c^2 = E_1 + K + m_0 c^2$$

ou,

$$E_0 - E_1 = K$$

ou ainda, como $E_0 = p_0 c$ e, $E_1 = p_1 c$,

$$c(p_0 - p_1) = K \quad (3.12)$$

Substituindo-se, $E = K + m_0 c^2$ na eq. (3.9), obtêm-se

$$(K + m_0 c^2)^2 = p^2 c^2 + (m_0 c^2)^2$$

ou,

$$K^2 + 2K m_0 c^2 = p^2 c^2$$

ou ainda,

$$\frac{K^2}{c^2} + 2K m_0 = p^2 \quad (3.13)$$

Substituindo p^2 da eq. (3.11) e K da eq. (3.12) na eq. (3.13) acima, obtêm-se

$$(p_0 - p_1)^2 + 2m_0 c (p_0 - p_1) = p_0^2 + p_1^2 - 2p_0 p_1 \cos \theta$$

$$\Rightarrow \cancel{p_0^2 + p_1^2} - 2p_0 p_1 + 2m_0 c (p_0 - p_1) = \cancel{p_0^2 + p_1^2} - 2p_0 p_1 \cos \theta$$

ou,

$$m_0 c (p_0 - p_1) = p_0 p_1 (1 - \cos \theta)$$

ou ainda,

$$\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_0} = \frac{1}{m_0 c} (1 - \cos \theta)$$

Multiplicando-se por h , e aplicando-se as expressões $\lambda_1 = h/p_1$ e $\lambda_0 = h/p_0$, obtêm-se o deslocamento Compton $\Delta\lambda$, como sendo

$$\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_0 = \lambda_c (1 - \cos \theta) \quad (3.14)$$

onde,

$$\lambda_c = \frac{h}{m_0 c} = 2,43 \times 10^{-12} \text{ m} = 0,0243 \text{ \AA} \quad (3.15)$$

é denominado de comprimento de onda Compton.

Observe que $\Delta\lambda$ só depende do ângulo de espalhamento θ , variando desde zero, para $\theta=0$ (colisão de "raspad") até $2h/m_0c = 0,049\text{\AA}$, para $\theta=180^\circ$ (colisão frontal). A eq. (3.14) está em acordo com os resultados experimentais de Compton, dados na fig. 3.5.

A eq. (3.14) explica o motivo da existência do primeiro máximo nos experimentos de Compton mostrados na fig. 3.5. O motivo está associado aos elétrons que estão fortemente ligados aos átomos do alvo, e que, também participam do processo de colisão. Se um elétron de massa m_0 não é ejetado de um átomo de massa M , quem sofre recuo durante a colisão é o próprio átomo. Nesse caso, a massa característica para o processo é a massa M do átomo, que deve substituir a massa eletrônica m_0 , na eq. (3.15). Como $M \gg m_0$, em particular $M \approx 22000 m_0$ para o carbono, vê-se que $\Delta\lambda$ é extremamente pequeno, de modo que o comprimento de onda do fóton espalhado permanece praticamente inalterado. Assim, no efeito Compton, alguns fótons são espalhados por elétrons que são liberados na colisão (esses fótons têm seus comprimentos de onda modificados). Outros fótons são espalhados por elétrons que permanecem ligados após a colisão (esses fótons não têm seus comprimentos de onda modificados).

O processo de espalhamento de fótons, no qual o comprimento de onda não é modificado, é denominado espalhamento Thomson, pois já tinha sido observado e explicado por este físico em 1900, utilizando a teoria eletromagnética

clássica. Embora a explicação clássica do espalhamento Thomson seja diferente da explicação quântica, ambas explicam o mesmo fato experimental. Nesse contexto, o espalhamento Thomson é um caso onde resultados clássicos e quânticos se equivalem.

Existem regiões do espectro eletromagnético onde o espalhamento Thomson é dominante, e regiões onde o espalhamento Compton é dominante. Se por exemplo, a radiação incidente está abaixo da região do visível (infravermelho, microondas, ou rádio), então $\Delta\lambda \approx 0$, independentemente se a massa é eletrônica ou atômica. Nesse caso, a onda espalhada terá um comprimento de onda igual ao comprimento de onda da onda incidente dentro da precisão experimental. Assim, a medida que $\lambda \rightarrow \infty$, os resultados quânticos são equivalentes aos resultados clássicos e o espalhamento Thomson é dominante. A medida que a radiação incidente se aproxima da região dos raios X, o espalhamento Compton começa a se tornar importante. Na região dos raios X onde $\lambda \rightarrow 0$, a energia do fóton é tão grande que um elétron sempre é liberado na colisão, e o espalhamento Compton torna-se dominante. Assim, é na região de pequenos comprimentos de onda que os resultados clássicos deixam de explicar o espalhamento da radiação, da mesma forma que também é nessa região que as previsões clássicas não explicam a radiação de cavidade num corpo negro, onde se observa a famosa catástrofe do ultravioleta.

Exemplo 3.2 - Eisberg 02.16 (a) - FACULTATIVO

Fótons de comprimento de onda $\lambda_0 = 0,024 \text{ \AA}$ incidem sobre elétrons livres. Ache o comprimento de onda λ_1 de um fóton que é espalhado de um ângulo $\theta = 30^\circ$ em relação à direção de incidência, e a energia cinética transferida ao elétron.

O deslocamento Compton para $\theta = 30^\circ$, será

$$\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_0 = \lambda_c (1 - \cos\theta) = 0,0243(1 - \cos 30^\circ) = 0,003256 \text{ \AA}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 - 0,024 = 0,003256 \Rightarrow \boxed{\lambda_1 \cong 0,027 \text{ \AA}}$$

A energia cinética transferida ao elétron, pode ser calculada a partir da eq. (2.12) e do fato que $p = h/\lambda$:

$$K = c(p_0 - p_1) = hc \left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda_1} \right)$$

$$= 6,63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8 \left(\frac{1}{0,024 \times 10^{-10}} - \frac{1}{0,027 \times 10^{-10}} \right)$$

$$= 92,08 \times 10^{-16} \text{ J}$$

ou, como $1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$,

$$\boxed{K \cong 0,057 \text{ MeV}}$$

Exemplo 3.3 - Exemplo do Mullin

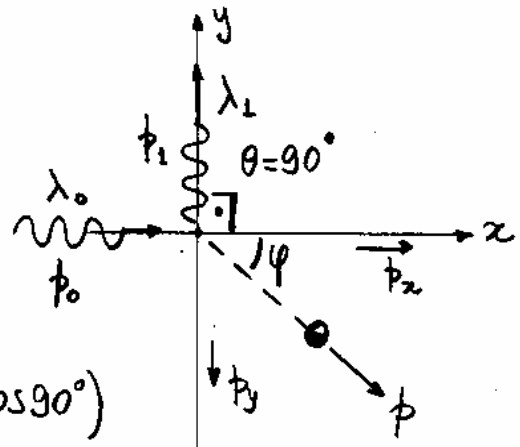
Raios X de comprimento de onda $\lambda_0 = 0,711 \text{ \AA}$ incidem sobre elétrons livres de uma amostra de grafite. Se fótons espalhados numa direção $\theta = 90^\circ$ são detectados, encontre o módulo p do momento do elétron e o ângulo φ de recuo desse elétron.

O comprimento de onda do fóton espalhado será,

$$\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_0 = \lambda_c (1 - \cos\theta)$$

$$\lambda_1 = \lambda_c (1 - \cos\theta) + \lambda_0 = 0,0243 (1 - \cos 90^\circ) + 0,711$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0,735 \text{ \AA}$$



Pela conservação do momento,

$$p_x = p_0 = \frac{h}{\lambda_0} = \frac{6,63 \times 10^{-34}}{0,711 \times 10^{-10}} = 9,32 \times 10^{-24} \text{ kg.m/s}$$

$$p_y = p_1 = \frac{h}{\lambda_1} = \frac{6,63 \times 10^{-34}}{0,735 \times 10^{-10}} = 9,02 \times 10^{-24} \text{ kg.m/s}$$

$$\Rightarrow p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} \Rightarrow \boxed{p = 12,97 \times 10^{-24} \text{ kg.m/s}}$$

O ângulo de recuo será,

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{p_y}{p_x} = \frac{9,02 \times 10^{-24}}{9,32 \times 10^{-24}} \Rightarrow \boxed{\varphi = 44^\circ}$$

3.3. Natureza Dual da Radiação.

A hipótese da existência do fóton para explicar processos que envolvem a interação da radiação com a matéria é satisfatória, todavia, ao mesmo tempo é necessária a concepção ondulatória da radiação para entender os fenômenos de interferência e Difração. Nesse contexto, a radiação se comporta como uma onda em certas circunstâncias e como uma partícula em outras. Essa concepção é evidenciada nos trabalhos experimentais de Compton. Por um lado, as medidas dos comprimentos de onda dos raios X são realizadas aplicando-se a teoria ondulatória da difração a planos cristalinos. Por outro lado, o espalhamento modifica o comprimento de onda de uma forma tal que só pode ser explicado tratando-se os raios X como se fossem partículas.

No início, quando foi sugerida, a dualidade na natureza onda-partícula da radiação eletromagnética foi considerada estranha pela maioria dos cientistas da época. Entretanto, essa estranheza deixou de existir com o desenvolvimento da mecânica quântica quando ficou claro, como se verá mais tarde, que essa dualidade é, na verdade, uma característica de todos os entes físicos.

3.4- Produção de Raios X.

Os raios X, radiação eletromagnética de comprimentos de ondas menores que 1 \AA , recebeu esse nome porque, quando foi descoberto por Roentgen tinha natureza descontínua. Os raios X podem ser produzidos quando um feixe de elétrons de alta energia é freado ao atingir um alvo, como mostra a fig. 3.7. De acordo com a teoria eletromagnética clássica, a desaceleração dos elétrons causa emissão de um espectro contínuo de radiação, desde comprimentos de onda zero até infinito.

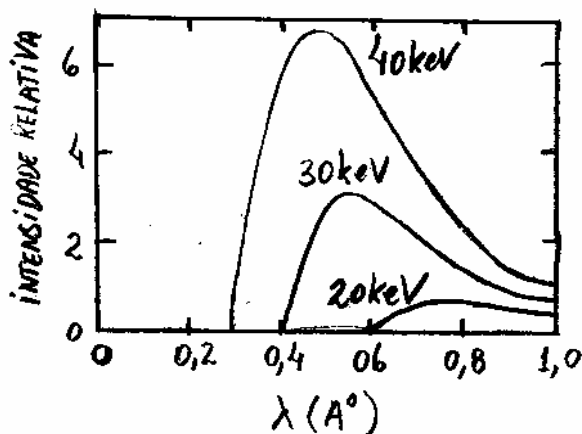
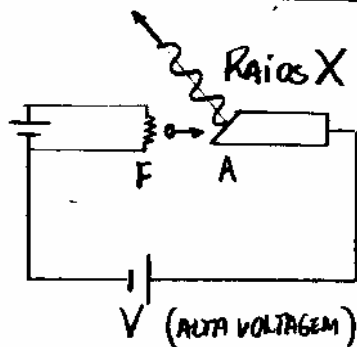


fig. 3.7- Sistema para produção de raios X, onde F é um filamento aquecido e A é um alvo; e espectros contínuos de raios X para um alvo de Tungstênio.

Entretanto, como se mostra também na fig. 3.7, para o caso de um alvo de tungstênio, o espectro de raios X observado para diferentes voltagens de aceleração, não está de acordo com as previsões clássicas.

A característica mais importante observada nos espectros da fig. 3.7, é que para uma dada energia dos elétrons, existe um comprimento de onda mínimo λ_{\min} , bem definido. Para qualquer material, o valor de λ_{\min} dependerá somente da diferença de potencial V . Este é o fato que a teoria eletromagnética clássica não pode explicar, pois de acordo com essa teoria, o espectro emitido deveria ser contínuo, não havendo razão para a existência de um limiar de comprimento de onda. Se entretanto os raios X forem encarados como fótons o fenômeno terá uma explicação satisfatória, como se segue.

Um elétron de energia cinética K é desacelerado pela interação com um núcleo pesado do alvo. Esse processo é conhecido como bremsstrahlung do alemão brems (= frenagem) + strahlung (= radiação). A energia perdida pelo elétron durante o processo de bremsstrahlung é convertida como um fóton de raios X, como mostra a fig. 3.8.

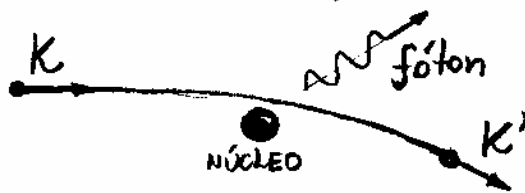


fig. 3.8 - Processo de bremsstrahlung para produção de raios X.

Se a energia cinética do elétron após a desaceleração é K' , então a energia do fóton gerado será,

$$h\nu = K - K'$$

ou, em termos de comprimentos de onda,

$$\frac{hc}{\lambda} = K - K' \quad (3.16)$$

Antes de chegar ao repouso, os elétrons sofrem diversos processos de bremsstrahlung, e as consequentes perdas de energias cinéticas, resultam no espectro contínuo observado na fig. 3.7. O fóton de menor comprimento de onda λ_{\min} , seria emitido quando um elétron perdesse toda a sua energia cinética ($K'=0$) num único processo de bremsstrahlung. Nesse caso, a eq. (3.16) torna-se,

$$\lambda_{\min} = hc/K$$

ou, assumindo $K = eV$,

$$\lambda_{\min} = \frac{hc}{eV} \quad (3.17)$$

Assim, o limite mínimo dos comprimentos de onda corresponde a uma conversão completa da energia dos elétrons em fótons de raios X. A eq. (3.17) mostra claramente que se $h \rightarrow 0$, então $\lambda_{\min} \rightarrow 0$, que é a previsão clássica. Isso mostra que a própria existência de um λ_{\min} implica num fenômeno quântico.

É interessante observar que no processo bremsstrahlung, um fóton é criado pela absorção de energia de elétrons, enquanto que, no efeito fotoelétrico, um fóton é absorvido, transferindo sua energia para elétrons. Assim, o processo bremsstrahlung é inverso ao efeito fotoelétrico.

3.5 - Produção e Aniquilação de Pares.

No processo de produção de pares, mostrado na fig. 3.9, um fóton de alta energia perde toda a sua energia $h\nu$ numa colisão com um núcleo, criando um par elétron-positron. Um pósitron é uma partícula que tem todas as propriedades de um elétron, exceto o sinal de sua carga e seu momento magnético. O pósitron tem momento magnético oposto ao do elétron.

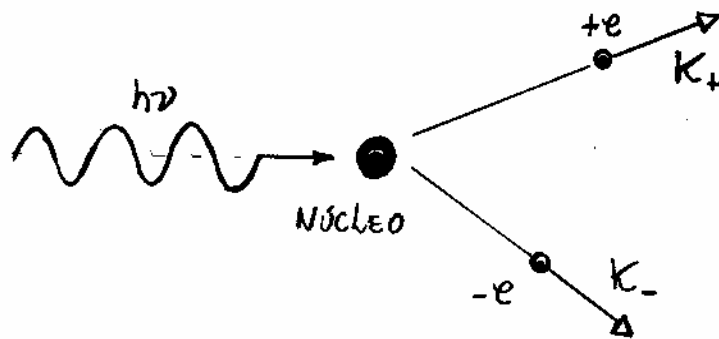


fig. 3.9 - Processo de produção de pares.

Na produção de pares o recuo do núcleo é desprezível. Assim, a conservação da energia relativística requer que,

$$h\nu = K_- + K_+ + 2m_0c^2 \quad (3.18)$$

onde K_- e K_+ são as energias cinéticas do elétron e do pósitron respectivamente. Observe que as duas partículas tem a mesma energia de repouso m_0c^2 . O pósitron tem uma energia cinética um pouco maior que a do elétron por causa da repulsão coulombiana do pósitron e atração do elétron com o núcleo.

Da eq. (3.18) observa-se que a energia mínima necessária para que um fóton crie um par é $2m_0c^2$, ou 1,02 MeV, correspondente a um comprimento de onda de $0,0124 \text{ \AA}$. O processo de produção de pares é um fenômeno de altas energias, com fótons nas regiões dos raios X ou raios γ .

Na natureza, pares elétron-positrons são produzidas por fótons de raios cósmicos (raios γ) e em laboratórios por fótons de bremsstrahlung (raios X), obtidos em aceleradores de partículas.

Resultados experimentais confirmam a teoria quântica para o processo de formação de pares. Não existe qualquer explicação satisfatória para esse fenômeno na teoria clássica.

Um processo inverso da produção de pares, ocorre quando um elétron e um positron estão próximos um do outro. As duas partículas se unem resultando em energia radiante, num processo denominado de aniquilação de pares. Como o momento inicial é zero, não é possível a criação de apenas um fóton, pois um único fóton não pode ter momento zero. A criação de dois fótons (fig. 3.10) movendo-se em sentido contrário, é mais provável. Embora seja possível também, a formação de três fótons.

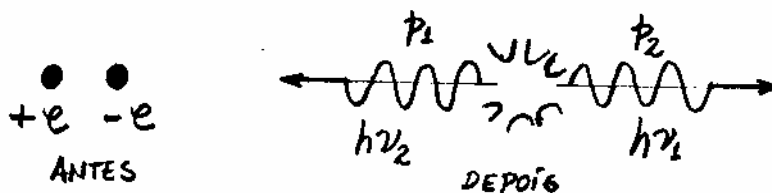


fig. 3.10 - Processo de aniquilação de pares.

No processo de aniquilação de pares para formação de dois fótons, a conservação do momento requer que, $p_1 = p_2$, ou $h\nu_1/c = h\nu_2/c$, ou ainda que,

$$\nu_1 = \nu_2 = \nu \quad (3.19)$$

indicando que os dois fótons sejam iguais. Por outro lado, a conservação da energia relativística requer que, $m_0c^2 + m_0c^2 = h\nu + h\nu$, ou

$$h\nu = m_0c^2 = 0,51 \text{ MeV} \quad (3.20)$$

Como $E = pc$, pode-se obter o momento p do fóton em termos da massa de repouso m_0 das partículas, como

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{m_0c^2}{c} = m_0c \quad (3.21)$$

de forma que, o comprimento de onda λ será dado por,

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_0c} = 0,024 \text{ \AA} \quad (3.22)$$

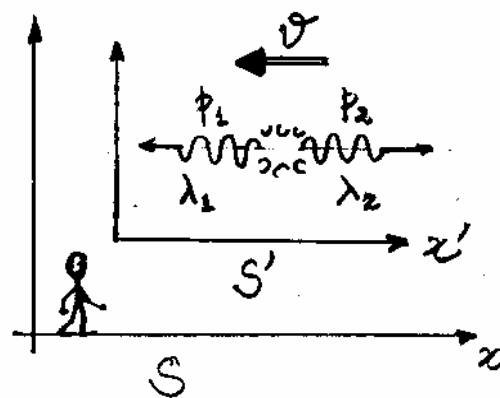
Se o par tivesse inicialmente alguma energia cinética, a energia do fóton excederia a 0,51 MeV, e seu comprimento de onda seria ainda menor que 0,024 \AA.

Antes da aniquilação, o pósitron se combina com um elétron formando um sistema ligado, ou "átomo", chamado de positrônio. O positrônio tem um tempo de vida extremamente curto, da ordem de 10^{-10} s.

Exemplo 3.4 - Exemplo do Eisberg.

Considere um processo de aniquilação de pares ocorrendo num referencial S' que se move, para a esquerda, com velocidade v em relação a um referencial fixo S . Determine os comprimentos de onda dos fótons medidos por um observador que está sobre o eixo x do referencial S .

Nesse caso, como o par se move para a esquerda com velocidade v , o seu momento inicial será $2mv$, em vez de zero como antes. Assim, a conservação do momento requer, que



$$2mv = p_1 - p_2$$

Por outro lado, agora o par tem energia total relativística inicial de $2mc^2$, em vez da energia de repouso $2m_0c^2$, e como, $E = pc$ para um fóton, a conservação da energia requer, que

$$2mc^2 = p_1c + p_2c$$

Multiplicando a primeira equação por c , em seguida, somando-a com a segunda equação, e usando o fato que $m = m_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$, obtém-se:

$$p_1 = m(c+v) = m_0 \frac{(c+v)}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = m_0 c \sqrt{\frac{(c+v)^2}{(c-v)(c+v)}} = m_0 c \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$$

de modo que o comprimento de onda, será

$$\lambda_1 = \frac{h}{p_1} = \frac{h}{m_0 c} \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} = \lambda \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \quad (3.23)$$

onde usamos a eq. (2.22). Similarmente, subtraindo em vez de somar as equações iniciais, obtém-se

$$\lambda_2 = \frac{h}{p_2} = \frac{h}{m_0 c} \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} = \lambda \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \quad (3.24)$$

Assim, os fótons não devem ter o mesmo comprimento de onda, pois estes são alterados pelo efeito Doppler, em relação ao valor λ que possuem no referencial de repouso S' . Se as fontes se aproximam do observador, ele detectará o fóton 1 com um comprimento de onda menor do que o comprimento de onda de repouso, e detectará o fóton 2 com um comprimento de onda maior do que o comprimento de onda de repouso.

Lista de Exercícios

1- Nas experiências do efeito fotoelétrico, a fotocorrente é proporcional à intensidade da luz. Esse resultado isolado pode ser usado para distinguir as teorias quântica e clássica? Explique.

2- Por que mesmo para radiações incidente monocromáticas os fotoelétrons são emitidos com diferentes velocidades?

3- O limiar fotoelétrico é considerado como sendo a objeção mais evidente da teoria ondulatória. Explique essa afirmativa.

4- (a) A energia necessária para que um elétron seja removido do sódio é $2.3eV$. Pode-se observar o efeito fotoelétrico no sódio utilizando-se radiação de comprimento de onda $\lambda = 5890\text{Å}$? (b) Qual é o comprimento de onda limiar para a emissão fotoelétrica do sódio? Resp.: (b) 5400Å .

5- Radiação de comprimento de onda 2000Å incide sobre uma superfície de alumínio. Para o alumínio, são necessários $4.2eV$ para remover um elétron. Qual é a energia cinética do fotoelétron emitido (a) mais rápido e (b) mais lento? (c) Qual é o potencial frenador? (d) Qual o comprimento de onda limiar para o alumínio? (e) Se a intensidade da luz incidente é $2.0W/m^2$, qual é o número médio de fótons por unidade de tempo e por unidade de área que atinge a superfície?

6- A função trabalho para uma superfície de Lítio é $2.3eV$. Faça um esboço do gráfico do potencial frenador V_0 em função da frequência da luz incidente para uma tal superfície, indicando suas características importantes.

7- O potencial frenador para fotoelétrons emitidos por uma superfície atingida por luz de comprimento de onda $\lambda = 4910\text{Å}$ é $0.71V$. Quando se muda o comprimento de onda da radiação incidente, encontra-se para este potencial um valor de $1.43V$. Qual é o novo comprimento de onda?

8- Numa experiência fotoelétrica na qual se usa luz monocromática e um fotocátodo de sódio, encontra-se um potencial frenador de $1.85V$ para $\lambda = 3000\text{Å}$, e de $0.82V$ para $\lambda = 4000\text{Å}$. Destes dados, determine (a) o valor da constante de Planck, (b) a função trabalho do sódio, e (c) o comprimento de onda limiar para o sódio? Resp.: (a) $6.6 \times 10^{-34} J \times s$, (b) $2.3eV$, (c) 5400Å .

9- Considere uma incidência de luz sobre uma placa fotográfica. A luz será "gravada" se houver uma dissociação de moléculas de AgBr da placa. A energia mínima necessária para dissociar essas moléculas é da ordem de $10^{-19} J$. Calcule o comprimento de onda limiar, acima do qual a luz não vai sensibilizar a placa fotográfica.

10- (a) É mais fácil observar o efeito Compton com alvos compostos de átomos com número atômico alto ou baixo? Explique. (b) O efeito Compton pode ser observado com luz visível? Explique. (c) Discuta o espalhamento Thomson, comparando-o com o espalhamento Compton.

11- Fótons de comprimento de onda $\lambda = 0.024\text{Å}$ incidem sobre elétrons livres. (a) Ache o comprimento de onda de um fóton espalhado de um ângulo de 30° em relação à direção de incidência e a energia cinética transmitida ao elétron. Resp.: (a) 0.027Å , $0.057MeV$, (b) 0.060Å , $0.31MeV$.

12- Um fóton de energia inicial $1.0 \times 10^5 eV$ que se move no sentido positivo do eixo x, incide sobre um elétron livre em repouso. O fóton é espalhado de um ângulo de 90° , dirigindo-se no sentido positivo do eixo y. Ache as componentes do momento do elétron.

13- Qual é a energia cinética máxima possível de um elétron envolvido no processo Compton em termos da energia do fóton incidente $h\nu$ e da energia de repouso do elétron m_0c^2 ?

14- Determine a variação máxima do comprimento de onda no espalhamento Compton de fótons por prótons. Resp.: $2.64 \times 10^{-5} \text{ \AA}$.

15- Pensando nas energias dos elétrons num tubo de televisão, você esperaria que esse eletrodoméstico poderia emitir raios X? Explique.

16- Quais efeitos que se tem sobre o espectro resultante quando se diminui a voltagem num tubo de raios X?

17- Discuta o processo de bremsstrahlung como sendo o inverso do efeito Compton e do efeito fotoelétrico.

18- (a) Mostre que o comprimento de onda mínimo no espectro contínuo de raios X é dado por $\lambda_{\min} = 12.4 \text{ \AA} / V$, onde V é a voltagem aplicada em quilovolts. (b) Se a voltagem aplicada a um tubo de raios X é 186 kV, qual deve ser o valor de λ_{\min} ?

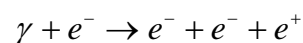
19- (a) Qual a voltagem mínima que deve ser aplicada a um tubo de raios X para que seja produzido raios X com o comprimento de onda Compton do elétron? E com o comprimento de onda de 1 \AA ? (b) Qual é a voltagem mínima necessária para que a radiação de bremsstrahlung resultante seja capaz de produzir um par?

20- Um raio γ de comprimento de onda 0.005 nm incide sobre um elétron inicialmente em repouso e é retro espalhado. Calcule o comprimento de onda do raio γ espalhado e a energia cinética, em keV , do elétron recuado.

21- Um raio γ de comprimento de onda 0.0062 nm incide sobre um elétron inicialmente em repouso. O elétron é recuado com energia cinética de 60 keV . Calcule a energia do raio γ espalhado, em keV , e determine a direção de espalhamento. Resp.: 140 keV , 95° .

22- Um raio γ cria um par elétron - pósitron. Mostre diretamente que, sem a presença de um terceiro corpo para absorver uma parte do momento, a energia e o momento não podem conservar simultaneamente. (Sugestão: Iguale as energias e mostre que isto implica em momentos diferentes antes e depois da interação).

23- Um raio γ pode produzir um par elétron - pósitron na vizinhança de um elétron em repouso, da mesma maneira que na vizinhança de um núcleo, como representado abaixo:



Mostre que nesse caso a energia mínima é $4m_0c^2$. (Sugestão: Suponha que as três partículas se afastam juntas e determine a energia mínima do fóton $\varepsilon = h\nu_{\min}$ para que o processo possa ocorrer. Use as leis da

conservação do momento linear e da energia, para mostrar que $v = \frac{\varepsilon c}{\varepsilon + m_0c^2}$, ou $1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{2\varepsilon m_0c^2 + m_0^2c^4}{(\varepsilon + m_0c^2)^2}$

. Substitua esses resultados na equação resultante da conservação do momento e mostre que

$$\varepsilon = h\nu_{\min} = \frac{9m_0c^2 - m_0c^2}{2} = 4m_0c^2.$$