

# NOTAS DE AULAS DE FÍSICA MODERNA

Prof. Carlos R. A. Lima

CAPÍTULO 5

## **PROPRIEDADES ONDULATÓRIAS DA MATÉRIA**

Primeira Edição – junho de 2005

# CAPÍTULO 5 – PROPRIEDADES ONDULATÓRIAS DA MATÉRIA

## ÍNDICE

- 5.1- Postulados de de Broglie
- 5.2- Interpretação Probabilística da Dualidade Onda - Partícula
- 5.3- Propriedades das Ondas de Matéria
- 5.4- Princípio da Incerteza
- 5.5- Experimento de Franck e Hertz
- 5.6- Integral de Ação e Regras da Quantização
- 5.7- Modelo de Sommerfeld

Nessa apostila aparecem seções, sub-seções e exemplos resolvidos intitulados como **facultativos**. Os assuntos que se referem esses casos, podem ser dispensados pelo professor durante a exposição de aula sem prejuízo da continuidade do curso de Estrutura da Matéria. Entretanto, é desejável que os alunos leiam tais assuntos e discutam dúvidas com o professor fora do horário de aula. Fica a cargo do professor a cobrança ou não dos tópicos facultativos.

Excluindo os tópicos facultativos, esse capítulo deve ser abordado no máximo em **3 aulas de quatro créditos**.

## CAPÍTULO 05

### PROPRIEDADES ONDUATÓRIAS DA MATÉRIA

#### 5.1. Postulados de de Broglie.

Em sua tese de doutoramento, apresentada em 1924 à Faculdade de Ciências da Universidade de Paris, Louis de Broglie propôs a existência de ondas de matéria. Cinco anos mais tarde, de Broglie recebeu o prêmio nobel em física, quando suas idéias foram dramaticamente confirmadas por experiências. As idéias de de Broglie foram extremamente importantes para o início do desenvolvimento da mecânica quântica.

A hipótese de de Broglie considerava que o comportamento dual, onda-partícula, da radiação também se aplicava à matéria. De acordo com de Broglie, a energia  $E = h\nu$  e o momento  $p = h/\lambda$ , obtidos nos eqs. (3.7) e (3.10) para a radiação, também se aplica à matéria. A segunda equação, escrita na forma

$$\lambda = h/p \quad (5.1)$$

é chamada de equação de de Broglie, e prevê um comprimento de onda de de Broglie para uma partícula material que tem um momento  $p$ .

A quantização do momento angular no átomo, proposta por Bohr em seu primeiro postulado, pode ser obtida diretamente a partir do postulado de de Broglie. Como o elétron no átomo deve mover-se em órbitas discretas e fechadas, segundo o referido postulado de Bohr, então uma órbita de raio  $r$  deve conter um número  $n$  de ondas  $\lambda$  de de Broglie do elétron, como mostra a fig. 5.1.

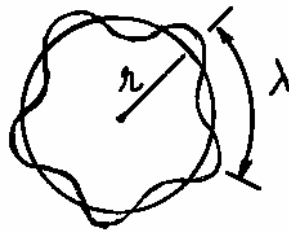


fig. 5.1 - Estado estacionário numa órbita de Bohr.

De acordo com esta ideia, a razão entre o perímetro da órbita  $2\pi r$ , e o comprimento de onda  $\lambda$  de de Broglie, daria um número inteiro  $n$ , isto é

$$n = \frac{2\pi r}{\lambda} = \frac{2\pi r}{h/p} = \frac{2\pi}{h} L$$

ou,

$$L_n = n\hbar \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

onde  $L = rp$  é o momento angular clássico do elétron, e  $\hbar = h/2\pi$ .

Seja determinar o comprimento de onda de de Broglie de um elétron ( $m = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ ) cuja energia cinética é 100 eV. Como a energia cinética  $K$  se relaciona ao momento  $p$ , por  $K = p^2/2m$  e, como  $K = 100 \text{ eV} = 1,60 \times 10^{-19} \text{ J}$ , então

$$\lambda = h/p = h/\sqrt{2mK} = 1,2 \text{ \AA} \quad (5.2)$$

Um outro exemplo interessante, seria a determinação do comprimento de onda de de Broglie de uma bola de boliche de massa  $m = 10 \text{ kg}$ , se movendo com velocidade  $v = 10 \text{ m/s}$ . Nesse caso,

$$\lambda = h/p = h/mv = 6,6 \times 10^{-25} \text{ \AA} \quad (5.3)$$

Sabe-se que, no caso da luz, os limites da óptica geométrica ocorrem quando o comprimento de onda  $\lambda$  é muito menor que as dimensões  $a$  de aberturas, ou obstáculos ( $\lambda \ll a$ ). Assim, na óptica geométrica a luz pode ser tratada como uma propagação de raios, o que é análogo à trajetórias de partículas clássicas, ou macroscópicas. Entretanto, se  $\lambda \gtrsim a$ , estar-se-á nos limites da óptica ondulatória, ou óptica física. Neste caso, o ângulo de difração  $\theta = \lambda/a$ , torna-se suficientemente grande e a natureza ondulatória da luz se evidencia. Para se observar a natureza ondulatória no movimento da matéria, será necessário então, sistemas de aberturas ou obstáculos convenientemente pequenos.

Na época de de Broglie, os sistemas mais apropriados para este fim eram os espaçamentos entre planos adjacentes de um cristal, onde  $a \approx 1 \text{ \AA}$ . Atualmente tem-se acesso a sistemas que envolvem dimensões nucleares, onde  $a \approx 10^{-4} \text{ \AA}$ . Considerando o comprimento de onda de de Broglie (5.3), vê-se que não se pode esperar a detecção de qualquer evidência de movimento ondulatório no movimento da bola de boliche, onde  $\lambda/a \approx 10^{-25}$ , para  $a \approx 1 \text{ \AA}$ . Entretanto, aspectos ondulatórios do movimento do elétron com  $\lambda = 1,2 \text{ \AA}$  seriam bem evidentes para  $a \approx 1 \text{ \AA}$ .

Uma montagem para testar a natureza ondulatória de elétrons, similar a usada na difração de raios X, foi proposta por Elvasser em 1926, experimentada por Davisson e Germer nos Estados Unidos e por Thomson na Escócia em 1927. A experiência de Davisson e Germer é ilustrada na fig. 5.2.

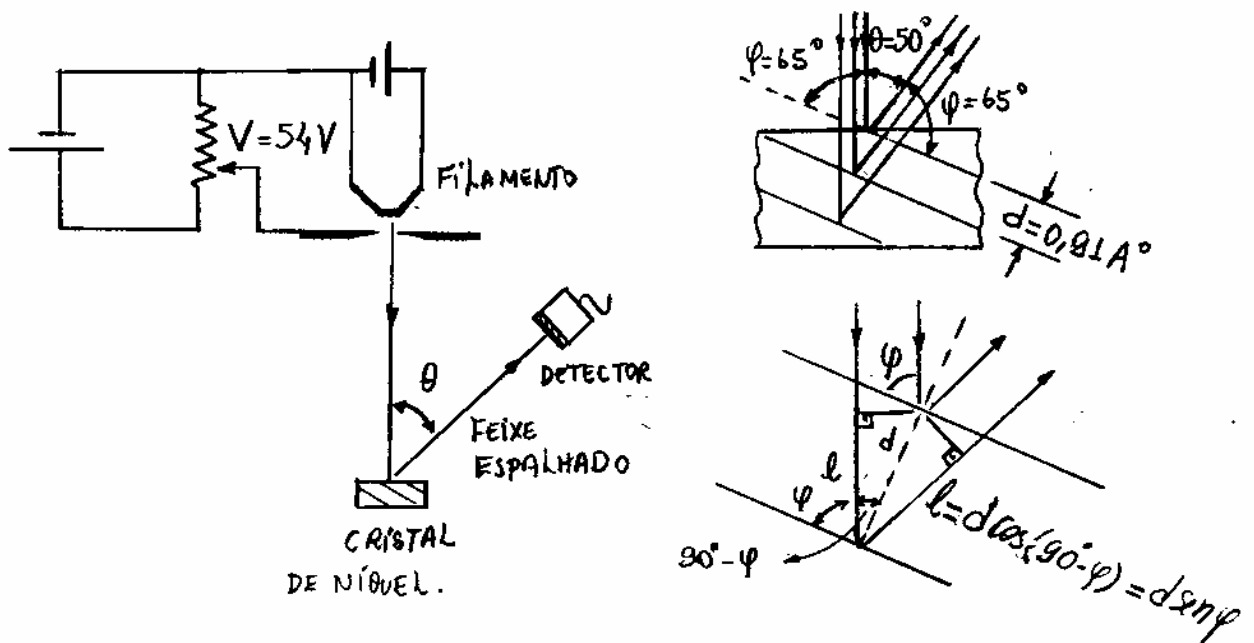


fig. 5.2. Experimento de Davisson e Germer.

No experimento, um feixe de elétrons de baixa energia é produzido num filamento aquecido e acelerado por uma diferença de potencial  $V$ . O feixe eletrônico incide normalmente sobre a superfície de um cristal de Níquel. Um detector é colocado num ângulo  $\theta$  para medir a intensidade do feixe espalhado. A experiência mostra que existe uma intensidade máxima quando  $\theta = 50^\circ$  para  $V = 54 \text{ V}$ . A existência deste máximo pôde ser explicada pela interferência construtiva de ondas espalhadas nos planos cristalinos periódicos. O fenômeno é similar à "reflexão de Bragg" que ocorre no espalhamento de raios X nos cristais.

Ainda na fig. 5.2, observa-se que a condição de interferência construtiva, ocorre quando a diferença de caminho óptico entre dois feixes consecutivos, corresponde a um número inteiro de comprimento de onda. Essa condição reproduz a relação de Bragg, dada, por

$$2d \sin \varphi = \lambda \quad (5.4)$$

Usando os valores,  $d = 0,91 \text{ \AA}$  e,  $\varphi = 65^\circ$ , dados na figura, obtém-se o comprimento de onda do feixe espalhado, por

$$\lambda = 2d \sin \varphi = 2 \times 0,91 \times \sin 65^\circ = 1,65 \text{ \AA}$$

Por outro lado, o comprimento de onda de de Broglie para elétrons de energia  $54\text{eV} = 86,4 \times 10^{-19}\text{J}$ , será dado, por

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mK}} = 1,665 \text{ \AA}$$

A concordância entre os resultados confirma quantitativamente a hipótese de de Broglie.

Ainda em 1927, G. P. Thomson mostrou a difração de feixes de elétrons ao passar através de finos filmes cristalinos, confirmando de forma independente a relação de de Broglie. A fig. 5.3 mostra a figura de difração do espalhamento de elétrons num filme de cristais de ouro. O resultado é bastante similar à figura de difração observada com raios X. A difração ocorre em aberturas circulares no interior do filme metálico.

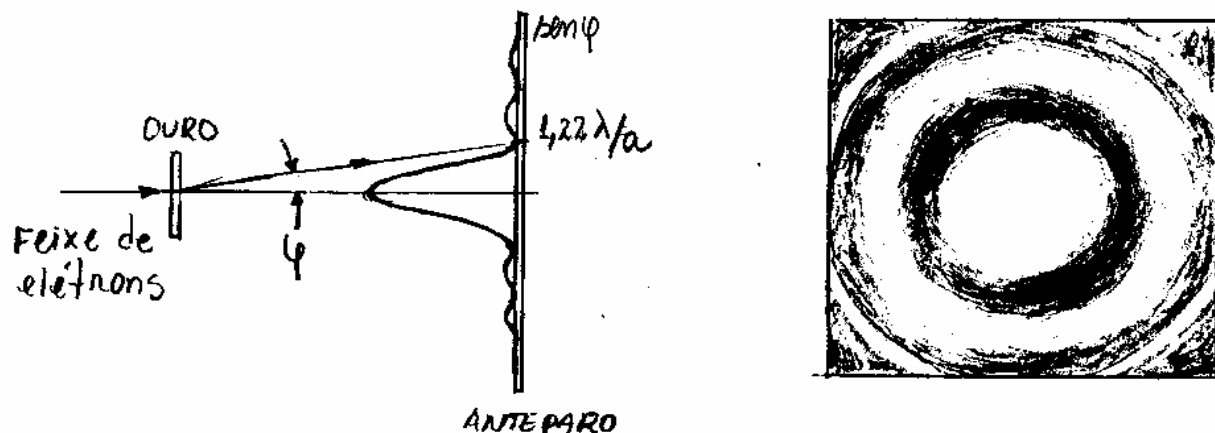


Fig. 5.3 - Experimento de Thomson para mostrar a difração de elétrons num filme de ouro.



É interessante relatar que J.J. Thomson recebeu o prêmio nobel de física em 1906 pelo descobrimento do elétron e que seu filho, Gernu P. Thomson, juntamente com Davison, recebeu o prêmio nobel de física em 1937 por experimentos de difração de elétrons realizadas em 1927. Assim, pode-se dizer que Thomson, o pai, recebeu o prêmio nobel por ter mostrado que o elétron é uma partícula e Thomson, o filho, recebeu o prêmio nobel por ter mostrado que o elétron é uma onda.

Exemplo 5.1 - Eisberg 3.5 - FACULTATIVO.

Mostre que o comprimento de onda de de Broglie de uma partícula de carga  $e$ , massa de repouso  $m_0$ , se movendo com velocidades relativísticas é dada como uma função do potencial acelerado  $V$  como,  $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_0eV}} \left(1 + \frac{eV}{2m_0c^2}\right)^{-1/2}$ .

A energia total relativística é,  $E^2 = (pc)^2 + (m_0c^2)^2$ , ou, em termos de energia cinética,  $E = K + m_0c^2$ , de modo que:

$$(K + m_0c^2)^2 = (pc)^2 + (m_0c^2)^2 \Rightarrow K^2 + 2m_0c^2K + \cancel{(m_0c^2)^2} = (pc)^2 + \cancel{(m_0c^2)^2}$$

$$\Rightarrow pc = \sqrt{K^2 + 2m_0c^2K} = \sqrt{2m_0c^2K \left(1 + \frac{K}{2m_0c^2}\right)}$$

$$\Rightarrow pc = c \sqrt{2m_0K} \left(1 + \frac{K}{2m_0c^2}\right)^{1/2}$$

ou,

$$p = \sqrt{2m_0K} \left(1 + \frac{K}{2m_0c^2}\right)^{1/2}$$

de modo que o comprimento de onda de de Broglie é,

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_0K} \left(1 + \frac{K}{2m_0c^2}\right)^{1/2}} \quad (5.5)$$

ou, escrevendo  $K = eV$ , a equação fica demonstrada.

A energia total relativística pode ainda ser escrita na seguinte forma,

$$E = \gamma m_0 c^2$$

onde,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

de modo que,

$$E = K + m_0 c^2 \Rightarrow \gamma m_0 c^2 = K + m_0 c^2 \Rightarrow \frac{K}{m_0 c^2} = \gamma - 1$$

No limite clássico ( $v \ll c$ ),  $\gamma \rightarrow 1$ , e portanto  $\frac{K}{m_0 c^2} \approx 0$ .

Nesse caso, a eq. (5.5) está de acordo com a definição inicial (5.2),

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_0K}}$$

## 5.2 - Interpretação Probabilística da dualidade onda-partícula.

Sabe-se agora que a dualidade onda-partícula se aplica tanto a radiação quanto a materia. Em algumas situações é necessário recorrer ao modelo corpuscular e em outras ao modelo ondulatório. É importante relatar, entretanto, que em qualquer medida que se faz aplica-se somente um único modelo. Os dois modelos não são usados sob as mesmas circunstâncias. Quando a radiação ou a materia é detectada por interações, de modo que é localizada, ela atua como partícula. Quando está se movendo, de modo que é deslocalizada, atua como uma onda e se observa fenômenos da difração.

Niels Bohr resumiu a questão em seu princípio da complementaridade. "Os modelos corpuscular e ondulatório são complementares. Se uma medida comprova o caráter ondulatório da radiação ou da materia, então é impossível comprovar o caráter corpuscular na mesma medida e vice-versa". Dessa forma, é importante buscar um conceito que unifique os modelos corpuscular e ondulatório.

A unificação entre os modelos corpuscular e ondulatório é feita por meio de uma interpretação probabilística da dualidade onda-partícula.

No caso da radiação, a unificação dos modelos foi proposta por Einstein. Em seguida, Max Born usou argumentos similares no caso da matéria.

No modelo ondulatório a intensidade da radiação  $I$ , é igual ao valor médio do módulo do vetor de Poynting  $\vec{S}$ , e portanto proporcional ao valor médio do módulo do campo elétrico  $\vec{E}$ , isto é

$$I = \langle |\vec{S}| \rangle = \frac{1}{\mu_0} \langle |\vec{E} \times \vec{B}| \rangle = \frac{1}{\mu_0} \langle EB \sin \frac{\pi}{2} \rangle = \frac{1}{\mu_0 c} \langle |\vec{E}|^2 \rangle \quad (5.6)$$

onde usou-se o fato que,  $B = E/c$ . No modelo corpuscular ou, de fótons, a intensidade da radiação é dada em função da frequência  $\nu$ , por

$$I = N h \nu \quad (5.7)$$

onde,  $N$  é o número médio de fótons por unidade de área e tempo. Assim, a definição da intensidade da radiação nos dois modelos mostra, que

$$N \propto |\vec{E}|^2 \quad (5.8)$$

ou seja, deve-se esperar que o número de fótons por unidade de área e tempo seja proporcional ao quadrado do módulo do campo elétrico da onda eletromagnética.

Deve-se lembrar que Einstein introduziu uma granu-  
laridade para a radiação, abandonando a inter-  
pretação contínua de Maxwell. Isto leva a uma  
interpretação estatística da intensidade.

Considere-se a famosa experiência de dupla  
fenda de Young, mostrada na fig. 5.4.

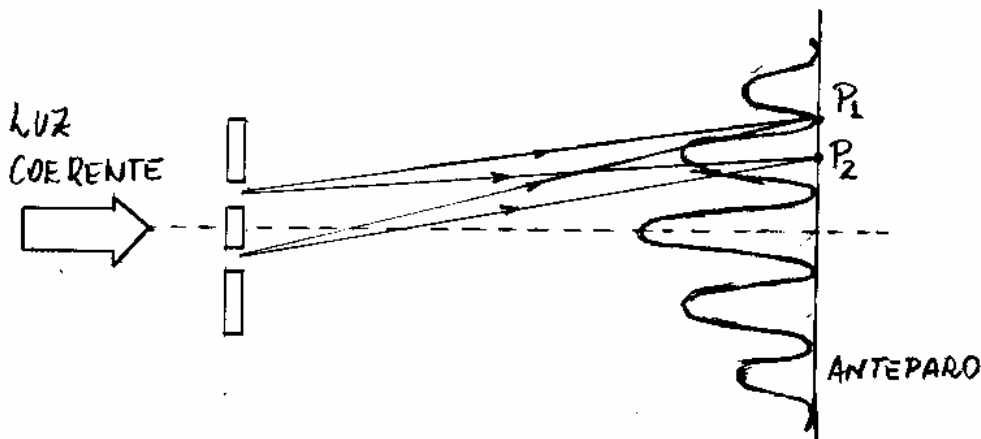


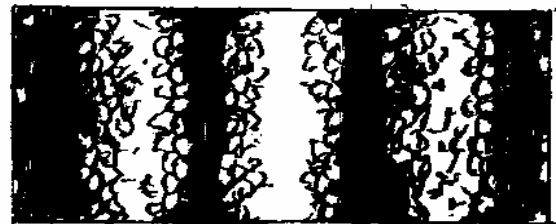
fig. 5.4 - Experiência da dupla fenda de Young.

A figura observada no anteparo é determinada  
pela interferência das ondas provenientes das  
fendas. No ponto  $P_1$ , onde ocorre interferência  
destrutiva, o campo elétrico resultante é nulo.  
No ponto  $P_2$ , onde ocorre interferência construtiva,  
o campo elétrico resultante é máximo. Se a  
intensidade da luz incidente nas fendas for  
reduzida, pode-se observar ainda a figura de  
interferência desde que se substitua  
o anteparo por um filme fotográfico e espere-se  
tempo suficiente para sensibilizá-lo.

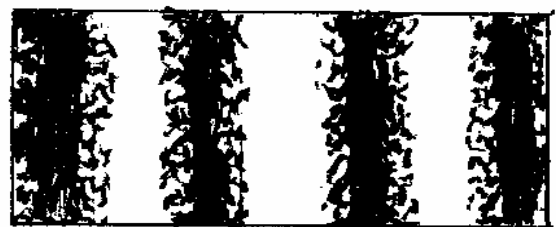
A interação da luz com o filme fotográfico é um fenômeno quântico. Se o filme for exposto durante um curto intervalo de tempo, com uma fonte de baixa intensidade, não se observa apenas uma versão menos intensa da figura de interferência obtida com luz intensa, mas também "pontos" resultantes das interações dos fótons com os cristálicos do filme, como mostra a fig. 5.5. Nas regiões onde as ondas interferem-se destrutivamente, não aparecem quaisquer pontos, isto é, nenhum fóton atinge essas regiões. Nas regiões onde a interferência é construtiva, aparecem muitos pontos, indicando que passam muitos fótons que ali chegam. A medida que a intensidade, ou o tempo de exposição, aumenta, as flutuações se uniformizam e não se observa a natureza quântica da luz. Mesmo quando a intensidade for muito baixa, a teoria ondulatória faz uma previsão correta da figura de interferência.



(a) 28 fótons



(b) 1000 fótons



(c) 10 000 fótons

fig. 5.5 - Figuras de interferência para diferentes intensidades, ou número de fótons.

Como  $|\vec{E}|^2$  é proporcional ao número  $N$  de fótons por unidade de área e tempo, pode-se interpretar  $|\vec{E}|^2$  como proporcional à probabilidade  $P$  de que um fóton atinja um certo ponto no filme, isto é, a menos de uma constante

$$P = |\vec{E}|^2 \quad (5.9)$$

Nos pontos onde  $|\vec{E}|^2$  é nulo, não se observam fótons no filme, ou no anteparo, enquanto que nos pontos onde  $|\vec{E}|^2$  é grande, será maior a probabilidade de se observar os fótons.

Baseado na interpretação de Einstein para a radiação, Max Born propôs uma unificação para a dualidade onda-partícula da matéria. Uma figura de interferência, similar a fig. 3.4, foi obtida com um feixe de elétrons. A unificação de Bohr surgiu vários anos depois de Erwin Schrödinger ter desenvolvido um formalismo matemático geral da mecânica quântica, que inclui o postulado de de Broglie.

Na teoria ondulatória da matéria, o movimento de uma partícula será descrito por uma função de onda  $\Psi$ . Da mesma forma que o campo elétrico  $\vec{E}$  é uma solução da equação de onda eletromagnética para radiações,  $\Psi$  deverá ser solução de uma equação de onda associada ao movimento da partícula. Esta equação foi obtida por Schrödinger e será discutida posteriormente.

Max Born conclui que a probabilidade de se encontrar uma partícula numa certa região do espaço é proporcional a  $|\psi|^2$ . A probabilidade de se encontrar uma partícula num certo elemento de volume  $dV$ , também deve ser proporcional ao tamanho de  $dV$ . Por exemplo, numa dimensão  $x$ , a probabilidade diferencial  $dP$  de se encontrar uma partícula num certo elemento linear  $dx$ , é dada por

$$dP = P(x)dx = |\psi|^2 dx \quad (5.10)$$

sendo a função,

$$P(x) = |\psi|^2 = dP/dx \quad (5.11)$$

conhecida como densidade de probabilidade.

### 5.3 - Propriedades das ondas de matéria.

De acordo com Born, a matéria deve apresentar propriedades ondulatórias, de modo que uma distribuição de onda localizada, deve representar uma distribuição de probabilidade para a localização de uma partícula quântica. O objetivo aqui é, analisar o comportamento das ondas que governam o movimento das partículas por meio de uma revisão das propriedades das ondas clássicas.



Pode-se começar considerando-se uma simples onda plana monocromática unidimensional, dada por

$$\psi(x,t) = A \sin(kx - \omega t) \quad (5.12)$$

onde,

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad e, \quad \omega = 2\pi\nu \quad (5.13)$$

são respectivamente, o número de onda e a frequência angular. Essa onda é uma onda plana pois, a função  $\psi$  é espacialmente constante sobre qualquer plano perpendicular à direção  $x$  de propagação. A velocidade de uma onda plana, conhecida como velocidade de fase  $v_p$ , pode ser determinada a partir de um ponto fixo na onda e observando-se o seu movimento ao longo do tempo. Matematicamente o ponto fixo é representado por uma fase constante:

$$kx - \omega t = \text{constante} \quad (5.14)$$

ou, derivando-se ambos os lados dessa equação, obtém-se:

$$v_p = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi\nu}{2\pi/\lambda} = \lambda\nu \quad (5.15)$$

No caso de uma onda de de Broglie associada a uma partícula de momento  $p = h/\lambda$ , e uma energia total igual a energia de um fóton  $E = h\nu$ , obtém-se

$$v_p = \lambda\nu = \frac{h}{p} \frac{E}{h} = \frac{E}{p} \quad (5.16)$$

usando a eq. (3.9) para energia relativística total da partícula, a velocidade de fase na eq. (5.16), torna-se

$$v_p = \frac{\sqrt{c^2 p^2 + (m_0 c^2)^2}}{p} = \frac{c \sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}}{p}$$

ou,

$$v_p = c \sqrt{1 + (m_0 c / p)^2} \quad (5.17)$$

Note que  $v_p > c$ . Este resultado parece estranho porque indica que a onda de matéria não seria capaz de acompanhar a partícula cujo movimento ela controla, e a violação da relatividade é aparente.

Para resolver esta dificuldade pode-se considerar primeiramente que a onda de de Broglie  $\Psi(x,t)$  seja a soma, ou batimento, de duas ondas monocromáticas  $\Psi_1(x,t) + \Psi_2(x,t)$ , em que suas frequências e números de onda diferem de pequenas quantidades  $\Delta\omega$  e  $\Delta k$  respectivamente, isto é

$$\Psi(x,t) = \Psi_1(x,t) + \Psi_2(x,t) \quad (5.18)$$

onde,

$$\Psi_1(x,t) = A \sin(kx - \omega t)$$

e,

$$\Psi_2(x,t) = A \sin[(k + \Delta k)x - (\omega + \Delta\omega)t]$$

Lembrando-se a seguinte identidade trigonométrica:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2 \cos[(\alpha - \beta)/2] \sin[(\alpha + \beta)/2]$$

obtem-se

$$\Psi(x,t) = 2A \cos\left[-\left(\frac{\Delta k x - \Delta \omega t}{2}\right)\right] \sin\left[\frac{2k + \Delta k}{2} x - \frac{2\omega + \Delta \omega}{2} t\right]$$

ou, assumindo  $\Delta k \ll k$ ,  $\Delta \omega \ll \omega$  e o fato que  $\cos$  é uma função par:

$$\Psi(x,t) \approx 2A \cos\left(\frac{\Delta k}{2} x - \frac{\Delta \omega}{2} t\right) \sin(kx - \omega t) \quad (5.19)$$

O segundo termo desta equação é uma onda da mesma forma que (5.12), mas modulada pelo primeiro termo, de modo que as oscilações de  $\Psi(x,t)$  são limitadas por uma envoltória que varia periodicamente. Esse comportamento é mostrado na fig. 5.6 num gráfico de  $\Psi(x,t)$  para um instante de tempo fixo.

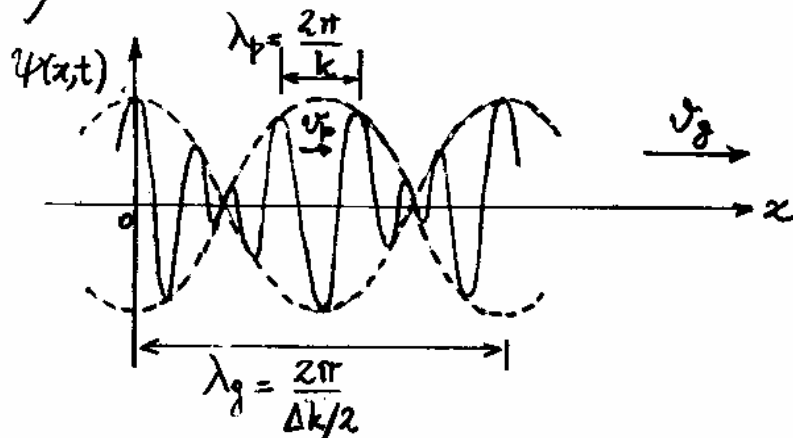


fig. 5.6 - Adição de duas ondas periódicas ligeiramente deslocadas em número de onda e frequência.

Assim, duas ondas de frequência e número de onda ligeiramente diferentes interferem-se construtivamente e destrutivamente, de forma alternada, gerando uma sucessão infinita de grupos. A velocidade de fase  $v_p$  das ondas individuais pode ser calculada considerando-se o segundo termo de  $\Psi(x,t)$ , e a velocidade do grupo  $v_g$  a partir do primeiro termo. Da mesma forma que se obtém  $v_p$  na eq. (5.15), obtém-se a velocidade do grupo da eq. (5.19), como

$$v_g = \frac{\Delta\omega/2}{\Delta k/2} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \quad (5.20)$$

Sempre que se forma um número finito de ondas monocromáticas de frequências e números de onda ligeiramente diferentes, tem-se uma frequência infinita de grupos de ondas. Esse resultado ainda não é satisfatório para se representar uma onda localizada de uma partícula quântica.

Pode-se alcançar o objetivo pretendido para a onda de de Broglie, considerando-se uma soma infinita e contínua de ondas planas. Nesse caso, é conveniente representar a onda plana numa forma complexa, dada, por

$$\Psi(x,t) = A [\cos(kx - \omega t) + i \sin(kx - \omega t)] = A e^{i(kx - \omega t)} \quad (5.21)$$

Somando-se uma quantidade infinita dessas ondas, diferindo de um elemento de número de ondas  $dk$  entre elas, tem-se

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{i(kx - \omega t)} dk \quad (5.22)$$

onde o fator  $1/\sqrt{2\pi}$  foi inserido para expressar a função densidade de probabilidade  $|\Psi(x,t)|^2$  associada a função de onda  $\Psi(x,t)$  numa notação de integral de Fourier dada, por

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\eta) e^{-i\xi\eta} d\eta \quad (5.23)$$

A variável de integração na eq. (5.22) é dada somente em função de  $k$  pois, da velocidade de fase  $\omega = v_f k = \omega(k)$ , a frequência também é uma função de  $k$ . A amplitude  $A(k)$  descreve as propriedades espectrais da superposição linear das ondas, e pode ser determinada pela transformada de Fourier inversa de  $\Psi(x,t)$  para  $t=0$ , isto é

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x,0) e^{-ikx} dx \quad (5.24)$$

Para uma onda plana do tipo  $\Psi(x,0) = e^{ik_0 x}$ , tem-se

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik_0 x} e^{-ikx} dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix(k-k_0)} dx$$

ou,

$$A(k) = \sqrt{2\pi} \delta(k-k_0) \quad (5.25)$$

onde utilizou-se a forma complexa da definição da função

delta de Dirac dada por,

$$\delta(\xi - \xi_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\eta(\xi - \xi_0)} d\eta \quad (5.26)$$

Cuja propriedade peculiar é ser diferente de zero somente num pequeno intervalo em torno de  $\xi_0$ , como mostra a fig. 5.7(a). Note que a distribuição espectral  $A(k)$  da função de onda  $\Psi(x,t)$  é representada por um pulso localizado em torno do número de onda  $k = k_0$ , como mostra a fig. 5.7(b). Assim, a forma da onda é controlada pela amplitude  $A(k)$ , tal que, fora de um pacote de onda espacialmente localizado ocorrem interferências destrutivas. Essa é uma representação adequada para a onda de matéria como sugere a fig. 3.7(c).

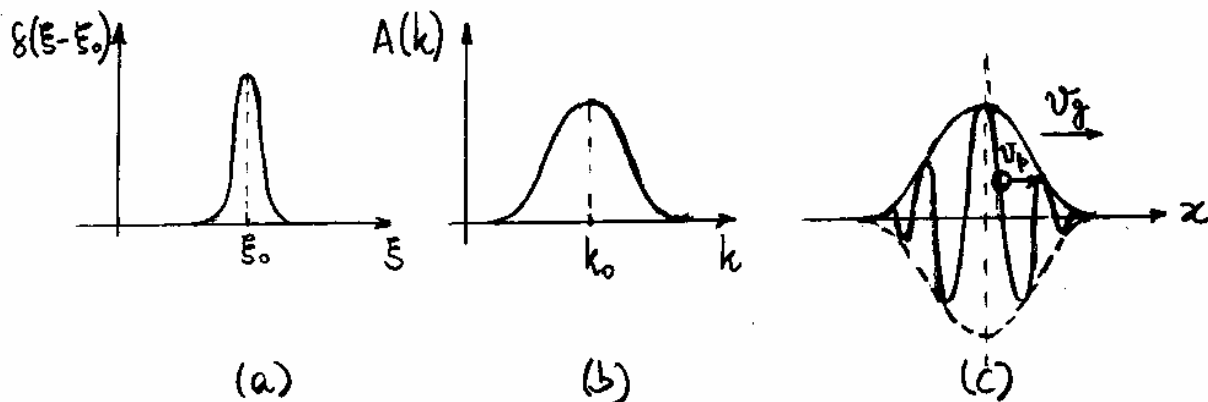


fig. 5.7- (a) Comportamento da função delta de Dirac.  
 (b) Distribuição espectral da função de onda  $\Psi(x,t)$ .  
 (c) Pacote de ondas que simula a trajetória da partícula.

Falta mostrar que o modelo do pacote de onda acompanha a partícula governada por ele.

Deve-se lembrar que, a função de onda  $\Psi(x,t)$  foi construída a partir de uma soma contínua de ondas de incrementos infinitesimais  $dk$  em número de ondas e  $d\omega$  em frequência angular. Nesse caso, a velocidade de grupo, dada pela eq. (5.20), deve ser reescrita assumindo intervalos infinitesimais, de modo que

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \quad (5.28)$$

Lembrando-se do comprimento de onda de de Broglie  $\lambda = h/p$  e da energia do fóton  $E = h\nu$ , tem-se

$$p = \frac{h}{\lambda} = h \frac{k}{2\pi} = \hbar k \quad (5.29)$$

e

$$E = h\nu = h \frac{\omega}{2\pi} = \hbar \omega \quad (5.30)$$

ou,  $d\omega = dE/\hbar$  e  $dk = dp/\hbar$ , de modo que

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dE}{dp} \quad (5.31)$$

Diferenciando-se ambos os lados da equação, que dá a energia relativística total de uma partícula,

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$$

obtem-se

$$2E dE = 2pc^2 dp$$

ou,

$$\frac{dE}{dp} = c^2 \frac{p}{E}$$

assim, a velocidade de grupo será

$$v_g = c^2 \frac{p}{E} \quad (5.32)$$

Lembrando-se as relações relativísticas,

$$E = mc^2 \quad \text{e} \quad p = mv \quad (5.33)$$

onde,

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (5.34)$$

é a massa relativística e  $v$ , a velocidade da partícula, tem-se

$$v_g = c^2 \frac{mv}{mc^2} = v \quad (5.35)$$

ou seja, a velocidade de grupo do pacote de onda é exatamente igual a velocidade da partícula cujo movimento ela governa. A relação entre a velocidade de grupo  $v_g = v$  e a velocidade de fase  $v_p$ , pode ser obtida lembrando-se que  $v_p = E/p$  da eq. (5.16), e combinando-a com a eq. (5.33):

$$v_p = \frac{mc^2}{mv} = \frac{c^2}{v} = \left( \frac{c^2}{v^2} \right) v > v = v_g \quad (5.36)$$

pois  $(c^2/v^2) > 1$ . Como  $v_p > v_g$ , as ondas individuais estão constantemente movendo-se através do grupo, para frente e para trás. A mesma situação ocorre em um grupo de ondas de água.



## 5.4 - Princípio da Incerteza

O que se propõe agora é encontrar a conexão entre a amplitude do grupo, ou pacote, de ondas e a localização da partícula. Deve-se considerar que a partícula tem a mesma probabilidade de estar em qualquer posição no interior do grupo de largura  $\Delta x$ , num instante  $t = t_0$ . Inicialmente, toma-se novamente o caso simplificado do grupo de ondas obtido pela combinação de duas ondas, com  $k$  e  $\omega$  ligeiramente diferentes, dado pela eq. (5.19) em  $t = t_0 = 0$ :

$$\psi(x, 0) \approx 2A \cos\left(\frac{\Delta k}{2} x\right) \cos kx \quad (5.37)$$

e esquematizado na fig. 5.8.

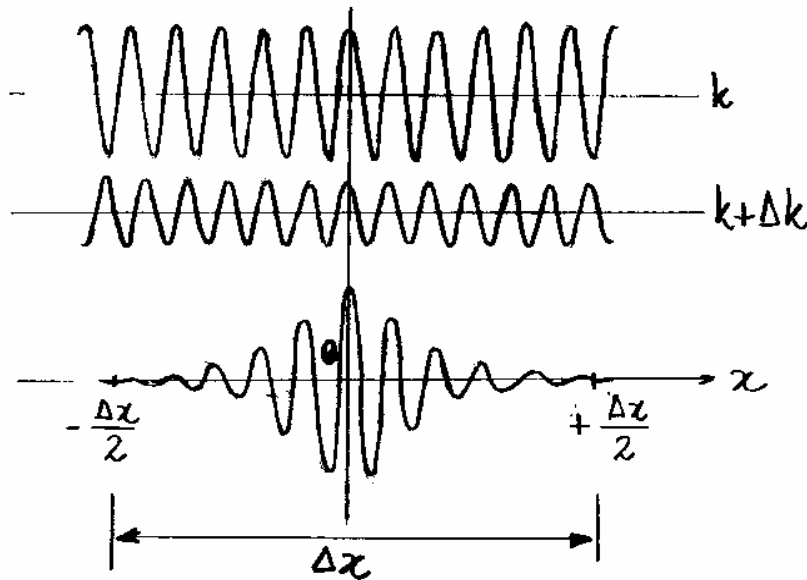


fig. 5.8 - Grupo de onda formado pela soma de duas ondas de números de onda  $k$  e  $k + \Delta k$ .

A eq. (5.37) mostra que a amplitude do grupo é máxima e igual a  $2A$  quando  $\alpha=0$ , e muda para  $\alpha = \Delta\alpha/2$ , quando,  $\Delta k/2 \Delta\alpha/2 = \pi/2$ , ou

$$\Delta k \Delta\alpha = 2\pi \quad (5.38)$$

Esse resultado mostra que a medida que se aumenta a diferença de número de onda  $\Delta k$  entre ondas consecutivas, a partícula fica cada vez mais localizada, já que  $\Delta\alpha$  diminui.

Um comportamento similar pode ser observado no tempo, fazendo-se  $\alpha = \alpha_0 = 0$  na eq. (5.19) de modo que,

$$\Psi(0,t) \approx 2A \cos\left(-\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \sin(-\omega t) = -2A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \sin\omega t$$

Nesse caso, a amplitude anula-se para  $t = \Delta t/2$ , quando

$$\Delta\omega \Delta t = 2\pi \quad (5.39)$$

mostrando que a indefinição  $\Delta\omega$  na frequência de um grupo, será menor quanto mais longo for o tempo de sua medição.

Para o caso de único grupo de ondas, obtido somando-se um número infinito de ondas, com  $k$  e  $\omega$  diferindo infinitesimalmente de um para outro, relações similares as eqs. (5.38) e (5.39) podem ser encontradas.

Aplicando-se a teoria da análise de Fourier, à partir da equação de onda definida pela integral de Fourier (5.22), pode-se mostrar que as referidas relações, são

$$\Delta k \Delta x \geq 1/2 \quad (5.40)$$

e,

$$\Delta \omega \Delta t \geq 1/2 \quad (5.41)$$

Essas equações podem ser reescritas em termos de grandezas físicas mais familiares, a partir das relações de de Broglie e Einstein, escritas nas formas das eqs. (5.29) e (5.30), isto é,  $p = \hbar k$  e  $E = \hbar \omega$ .

Essas relações podem ser escritas em termos de variações, isto é,  $\Delta p = \hbar \Delta k$  e  $\Delta E = \hbar \Delta \omega$ , de modo que as eqs. (5.40) e (5.41) podem ser reescritas nas seguintes formas:

$$\Delta p \Delta x \geq \hbar/2 \quad (5.42)$$

e

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar/2 \quad (5.43)$$

Essas relações foram primeiramente obtidas por Heisenberg em 1927, e se referem ao princípio da incerteza, ou princípio da indeterminação.

Na teoria clássica, as equações de movimento prevêm a posição e o momento de uma partícula de forma exata. Basta que se conheça a posição e o momento precisos da partícula em um certo instante de tempo  $t$ , e o movimento futuro fica determinado exatamente. No entanto, deve-se considerar que no processo de se realizar observações, o observador poderia interagir com o sistema. No mundo macroscópico essa consideração não deve ser importante pelo fato das energias de repouso dos corpos serem muito maiores do que as energias dos fótons usados para observá-los. Entretanto, em escalas microscópicas a situação é bem diferente. Pela teoria quântica, a limitação na determinação experimental da posição e do momento de uma partícula, ou radiação, é obtida pelo princípio da incerteza de Heisenberg, definido pelas relações (5.42) e (5.43). Este princípio afirma que uma experiência não pode determinar, simultaneamente, o valor exato de uma componente do momento e da posição correspondente, ou o valor exato da energia e do tempo de ocorrência do evento.

Na eq. (5.42),  $\Delta p$  identifica-se com uma incerteza no momento  $p$ , e  $\Delta x$  uma incerteza na posição  $x$  no mesmo

istante de tempo. Similarmente, na eq. (5.43),  $\Delta E$  é a incerteza na determinação da energia e  $\Delta t$  o intervalo de tempo característico de ocorrência de mudanças no sistema.

O princípio da incerteza garante que, mesmo que se tenha instrumentos ideais, nunca se poderá obter resultados melhores do que aqueles definidos pelas eqs. (5.42) e (5.43). Deve-se notar que, quanto mais se modifica uma experiência para mellhorar a precisão na determinação de  $p$ , ou  $E$ , mais se abre mão da precisão na determinação da posição  $x$ , ou tempo  $t$ . No caso do momento  $p$  e da posição  $x$ , quando se conhece  $p$  exatamente, nada se sabe a respeito de  $x$ , isto é, se  $\Delta p = 0$ , então  $\Delta x = \infty$ . Portanto, a restrição não é em relação à precisão com que  $p$  ou  $x$  podem ser medidos, mas em relação ao produto  $\Delta p \Delta x$  numa medida simultânea de ambas.

Nota-se que, é novamente a constante de Planck  $h$  que distingue os resultados quânticos dos clássicos. Se  $h$  fosse nulo nas relações (5.42) e (5.43), não haveria qualquer limitação nas medidas, como ocorre na teoria clássica. É o fato de  $h$  ser pequeno que tira o princípio da incerteza do alcance das nossas experiências cotidianas.

Para se entender melhor as consequências físicas do princípio da incerteza de Heisenberg, seja uma experiência imaginária, devido a Bohr, para verificar a eq. (5.42).

A experiência se baseia na determinação da posição de um elêtron com a maior precisão possível usando um microscópio para "vê-lo", como sugere a fig. 5.9. Para ver o elêtron precisa-se ilumina-lo, pois é na verdade o fóton de luz espalhado pelo elêtron que é visto pelo observador. No momento que se ilumina o elêtron, ele recua devido ao efeito Compton.

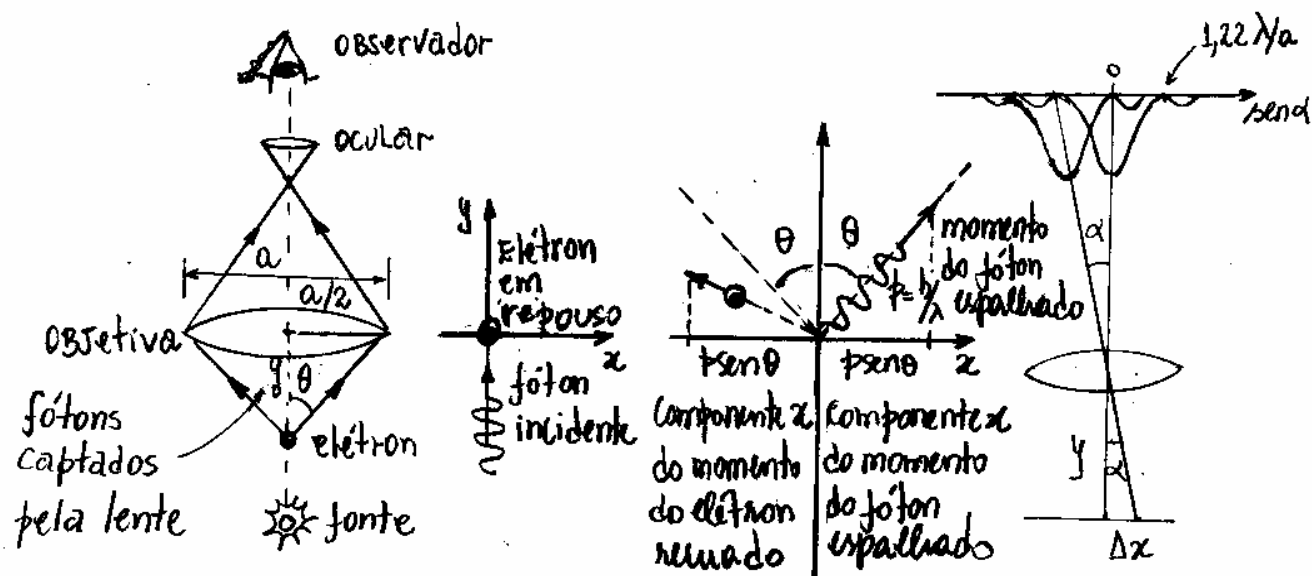


fig. 5.9 - Experiência imaginária do microscópio de Bohr.

No caso considerado, pode-se reduzir ao máximo a perturbação causada ao elêtron usando uma fonte muito fraca. Num caso extremo poderia-se ver o elêtron com apenas um fóton. O momento do fóton espalhado é  $p = h/\lambda$ . Este fóton pode ter sido espalhado em qualquer direção dentro da região angular  $2\theta$ . A componente x do momento do fóton espalhado pode variar de

$+p \sin \theta$  a  $-p \sin \theta$ , de modo que a incerteza após o espalhamento, é

$$\Delta p_x = 2p \sin \theta = (2h/\lambda) \sin \theta \quad (5.44)$$

Pela lei da conservação do momento, na direção  $x$ , a variação do momento do elétron é igual a do fóton. Logo, o elétron tem a mesma incerteza do fóton na determinação da componente  $x$  do momento. Nota-se que, para reduzir  $\Delta p_x$  pode-se aumentar  $\lambda$ , ou usar um microscópio com ângulo de abertura  $\theta$  menor.

A imagem de um objeto puntiforme, vista através de um microscópio, não é um ponto, mas uma figura de difração, definida pelo critério de resolução Rayleigh, como ilustrado na fig. 5.9. Por esse critério, a resolução máxima entre duas posições do elétron, é definida de modo que o máximo de difração numa posição do elétron deve coincidir com o mínimo de difração numa outra posição do elétron. Nesta configuração o ângulo de difração  $\alpha$  é pequeno, e, portanto

$$1,22 \frac{\lambda}{a} = \sin \alpha \approx \tan \alpha = \frac{\Delta x}{y}$$

ou,

$$\Delta x = 1,22 \frac{\lambda}{a} y$$

por outro lado,

$$\tan \theta = \frac{a/2}{y} = \frac{a}{2y} \Rightarrow y = \frac{a}{2 \tan \theta} = \frac{a}{2} \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

de modo que,

$$\Delta x = 1,22 \frac{\lambda}{2 \sin \theta} \quad (5.45)$$

A partir das eqs. (5.44) e (5.45), obtém-se

$$\Delta p_x \Delta x = (1,22 \cos \theta) h \quad (5.46)$$

que concorda razoavelmente com o limite  $h/2$  fixado pelo princípio da incerteza. Quando se tenta usar luz de comprimentos de onda  $\lambda$  pequeno (Raios X ou  $\gamma$ ), para melhorar a resolução reduzindo  $\Delta x$  na eq. (5.45), aumenta-se o reco Compton do elétron e conseqüentemente  $\Delta p_x$  na eq. (5.44), e vice-versa. Na prática, uma experiência dá resultados piores do que (5.46), pois essa relação representa a situação mais ideal possível. Mesmo a interação de um fóton com o sistema perturba o elétron de uma forma que não pode ser exatamente prevista ou controlada.

O princípio da incerteza permite compreender melhor a questão da dualidade onda-partícula. Retorne-se novamente a experiência de Young utilizando-se elétrons no lugar de fótons, e uma placa sensível a elétrons no lugar da placa fotográfica.

Suponha que a intensidade da fonte de elétrons seja reduzida a tal ponto que, em média, atinja a placa 1 elétron/hora por exemplo. Sabe-se que o decréscimo de intensidade não deve afetar a figura clássica de interferência.



Elétrons que atingem a placa, separados por 1 hora, evidentemente não estão correlacionados e, portanto, pode-se considerar este processo como sendo de um elétron de cada vez. Cada um dos elétrons atravessará uma ou outra fenda. Poderia-se incorporar ao experimento de Young um microscópio para se observar o número de elétrons que atravessam a fenda 1, e o número que atravessam a fenda 2. Para a primeira classe, poderia-se ter fechado a fenda 2, já que os elétrons por aí não passaram, enquanto que para a segunda classe, poderia-se ter fechado a fenda 1. Era de se esperar portanto, que a figura sobre a placa fosse a mesma, caso se repetisse a experiência com cada uma das fendas fechada por metade do tempo. Entretanto, sabe-se que este procedimento não deve fornecer a figura de interferência, pelo simples fato de se utilizar apenas uma das fendas.

Existe aqui então uma inconsistência em afirmar que a incorporação do microscópio ao experimento de Young não afetaria a experiência.

O princípio da incerteza de Heisenberg pode ser empregado para remover essa inconsistência, mostrando que a presença do microscópio promove uma incerteza na componente vertical do momento do elétron suficiente para destruir a figura de interferência sobre a placa.

Pode-se, portanto, observar o comportamento corpuscular ou ondulatório de uma partícula ou radiação, mas o princípio da incerteza impede de observá-los ao mesmo tempo. Assim, não é possível juntar a interpretação corpuscular e ondulatória num mesmo experimento. A onda e a matéria são como "moedas", que mostram apenas uma face ou outra, nunca ambas simultaneamente. Esta é a essência do princípio da complementaridade de Bohr. As ideias de onda e partícula são complementares e não contraditórias.

Na verdade, quando o microscópio não está presente, cada elétron atua como uma onda clássica e não faz sentido questionar em qual das fendas o elétron passou. O que se pode falar é de intensidade média de partículas em cada fenda ou na probabilidade de um elétron passar numa ou noutra fenda.

Exemplo 5.2 - Exemplo resolvido do Eisberg.

Verificou-se que a velocidade de um projétil, de massa  $m = 0,05 \text{ kg}$ , e a velocidade de um elétron, de massa  $m = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ , são iguais a  $300 \text{ m/s}$ , com uma incerteza de  $0,01\%$ . Com que precisão fundamental poderá-se ter localizado a posição de cada um, em uma medida simultânea com a da velocidade?

Para o elétron, tem-se

$$p = mv = 9,1 \times 10^{-31} \times 300 = 2,7 \times 10^{-28} \text{ kg.m/s}$$

e,

$$\Delta p = 0,0001 \times 2,7 \times 10^{-28} = 2,7 \times 10^{-32} \text{ kg.m/s}$$

de forma que, pelo princípio da incerteza,

$$\Delta x \gg \frac{\hbar}{2\Delta p} = \frac{1,055 \times 10^{-34}}{2 \times 2,7 \times 10^{-32}} = 2 \times 10^{-3} \text{ m} = 0,2 \text{ cm}$$

Para o projétil, tem-se

$$p = mv = 0,05 \times 300 = 15 \text{ kg.m/s}$$

e,

$$\Delta p = 0,0001 \times 15 = 1,5 \times 10^{-3} \text{ kg.m/s}$$

de forma que,

$$\Delta x \gg \frac{\hbar}{2\Delta p} = \frac{1,055 \times 10^{-34}}{2 \times 1,5 \times 10^{-3}} = 3,5 \times 10^{-32} \text{ m}$$

Portanto, para objetos macroscópicos, o princípio da incerteza não impõe nenhum limite prático ao nosso processo de medida. Neste exemplo,  $\Delta x$  é cerca de  $10^{17}$  vezes o diâmetro de um núcleo. Por outro lado, para objetos microscópicos, tais como elétrons, limites práticos são evidentes. Neste exemplo,  $\Delta x$  é cerca de  $10^7$  vezes o diâmetro de um átomo.

Exemplo 5.3 - Eisberg 03.25 - FACULTATIVO.

A energia de um oscilador harmônico linear é,

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2}$$

(a) Usando o princípio da incerteza, mostre que esta energia pode ser escrita como,

$$E = \frac{\hbar^2}{8m\xi^2} + \frac{k}{2}\xi^2$$

com,  $\xi \equiv \Delta x$ . (b) Mostre então que a energia mínima é dada por,

$$E_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega_0 = \frac{1}{2} \hbar \nu_0 \quad (5.48)$$

onde,  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ .

(a) A previsão clássica permite uma energia mínima igual a zero para o caso trivial de um oscilador na origem, onde  $p=0$  e  $x=0$ . Essa configuração simplesmente viola o princípio da incerteza, pois o oscilador deve ter algum movimento mínimo devido a incerteza em  $x$  e  $p$ . Podemos representar a energia  $E$  em termos da energia cinética e energia potencial médias sobre um ciclo do movimento, ou seja,

$$E = \frac{\langle p^2 \rangle}{2m} + \frac{k}{2} \langle x^2 \rangle$$

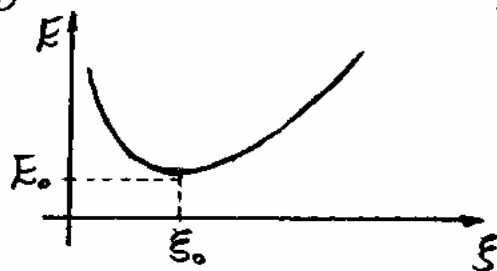
Identificando,  $\langle p^2 \rangle = \Delta p^2$  e,  $\langle x^2 \rangle = \Delta x^2$ , ou pelo princípio da incerteza,

$$\langle p^2 \rangle = \Delta p^2 = \left( \frac{\hbar}{2\Delta x} \right)^2$$

então,

$$E = \frac{\hbar^2}{8m\xi^2} + \frac{k}{2}\xi^2$$

onde abreviamos  $\Delta x \equiv \xi$ . A figura abaixo mostra um gráfico da energia  $E$  em função da incerteza  $\xi$ . A presença de um ponto de mínimo é evidente.



(b) A incerteza mínima  $\xi_0$  pode ser determinada como,

$$\frac{dE}{d\xi} = -\frac{\hbar^2}{4m\xi^3} + k\xi = 0$$

ou,

$$\xi_0^2 = \sqrt{\hbar^2/4mk}$$

e portanto,

$$E_0 = \frac{\hbar^2}{8m} \sqrt{\frac{4mk}{\hbar^2}} + \frac{k}{2} \sqrt{\frac{\hbar^2}{4mk}} = \frac{\hbar^2}{4\hbar} \sqrt{\frac{4mk}{4m^2}} + \frac{\hbar}{4} \sqrt{\frac{k^2}{mk}}$$

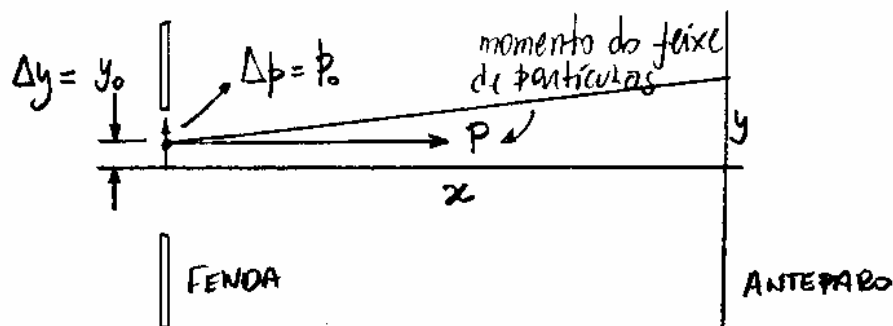
$$E_0 = \frac{\hbar}{4} \sqrt{\frac{k}{m}} + \frac{\hbar}{4} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{\hbar}{2} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2} \hbar \omega_0$$

onde,  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ .

### Exemplo 5.4 - Exemplo do Mullin

Considere a imagem sobre um anteparo por um feixe de partículas projetada através de uma fenda. A largura da imagem cresce com a largura da fenda, e também cresce quando a fenda se estreita devido a difração. Então deve existir uma largura intermediária para a fenda que produz uma largura mínima para a imagem. Use o princípio da incerteza para encontrar a largura da fenda para que o feixe tenha o menor deslocamento lateral no anteparo.

A figura abaixo mostra a situação do problema.



Suponha que uma partícula passe através da fenda numa posição  $y_0$ , em relação ao eixo central da fenda. De acordo com o princípio da incerteza, o momento transversal da partícula tem uma incerteza dada, por

$$p_0 = \frac{\hbar}{2y_0}$$

Essa incerteza aparece na figura como uma condição de incerteza inicial para um tratamento clássico do movimento subsequente da partícula. O deslocamento lateral da partícula, é

$$y = y_0 + v_0 t = y_0 + \frac{p_0}{m} t = y_0 + \frac{\hbar}{2m y_0} t$$

onde  $t$  é o tempo que a partícula leva para atingir o anteparo. A distância  $x$  ao anteparo, é determinada pelo momento  $P$  do feixe de partículas, por

$$x = v t = \frac{P}{m} t \Rightarrow t = \frac{m x}{P}$$

de modo, que

$$y = y_0 + \frac{\hbar}{2m y_0} \frac{m x}{P} = y_0 + \frac{\hbar x}{2P} \frac{1}{y_0}$$

Essa expressão tem um mínimo para um determinado valor de  $y_0$ , obtido da condição

$$\frac{dy}{dy_0} = 1 - \frac{\hbar x}{2P y_0^2} = 0 \Rightarrow y_0 = \sqrt{\frac{\hbar x}{2P}}$$

e, portanto

$$y_{\min} = y_0 + \frac{y_0^2}{y_0} = 2y_0 \quad (5.49)$$

Conclui-se que a partícula tem o menor deslocamento lateral igual a  $2y_0$ , quando a largura da fenda é  $2y_0 = 2\sqrt{\hbar x / 2P}$ . Note que, como  $P = h/\lambda$  e  $\hbar = h/2\pi$ ,

$$2y_0 = 2\sqrt{\frac{\hbar x / 2h}{\lambda}} = 2\sqrt{\frac{\hbar x}{2\pi} \frac{\lambda}{2h}} \Rightarrow y_0 = \sqrt{\frac{\lambda x}{4\pi}} \quad (5.50)$$

## Lista de Exercícios

1- Por que a natureza ondulatória da matéria não é evidente em nossas observações diárias? O comportamento ondulatório de uma partícula clássica pode ser obtido assumindo-se  $m \rightarrow \infty$  na fórmula de de Broglie? Explique.

2- O comprimento de onda de de Broglie pode ser menor que a dimensão da partícula? Pode ser maior? É necessário que haja alguma relação entre essas grandezas?

3- A difração de elétrons pode ser utilizada para se estudar a estrutura de sólidos cristalinos? Explique.

4- Discuta a analogia: A óptica ondulatória é para a óptica geométrica assim como a mecânica quântica é para a mecânica clássica.

5- Afinal de conta o que é um elétron, uma partícula ou uma onda? Explique.

6- Discuta semelhanças e diferenças entre uma onda de matéria e uma onda eletromagnética

7- Um projétil de massa  $m = 40g$  move-se a uma velocidade  $v = 1000m / s$ . (a) Qual é o comprimento de onda de de Broglie que se pode associar a ele? (b) Por que sua natureza ondulatória não se revela por meio de efeitos de difração?

8- O comprimento de onda da emissão espectral amarela do sódio é  $\lambda = 5890A^0$ . Com que energia cinética um elétron teria o mesmo comprimento de onda de de Broglie?

9- Um elétron e um fóton tem ambos um comprimento de onda  $\lambda = 2.0A^0$ . Quais são (a) seus momentos? (b) suas energias totais? (c) Compare as energias cinéticas do elétron e do fóton.

10- Um nêutron térmico tem uma energia cinética  $(3/2)kT$ , onde  $T = 300K$  é a temperatura ambiente. Estes nêutrons estão em equilíbrio térmico com o ambiente. (a) Qual é a energia em elétrons - volt de um nêutron térmico? (b) Qual é o comprimento de onda de de Broglie?

11- Um feixe de nêutrons de  $1eV$  atinge um cristal cujo planos cristalinos estão separados por  $d = 0,025nm$ . Determine o ângulo de fase  $\varphi$  para o qual o primeiro máximo de interferência é observado.

12- O espaçamento planar em um cristal de cloreto de potássio é  $d = 3.14A^0$ . Compare o ângulo de reflexão de Bragg de primeira ordem, por esses planos, de elétrons com energia cinética  $40keV$  com o de fótons com energia  $40keV$ .

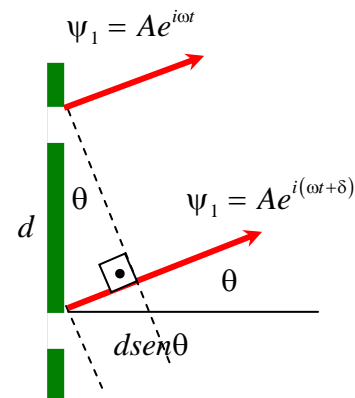
13- Considere a interferência de duas ondas  $\psi_1$  e  $\psi_2$ , emitidas de duas fendas estreitas e paralelas de distância  $d$ , como mostra a figura ao lado. As ondas têm mesmas amplitude  $A$ , mesma frequência  $\omega$  e diferença de fase  $\delta$ . Construa a superposição  $\psi_1 + \psi_2$  usando a notação complexa para a função de onda e mostre que a dependência do padrão de interferência resultante com o ângulo  $\theta$  é,

$$I = 4|A|^2 \cos\left(\frac{kd}{2} \text{sen}\theta\right). \quad (\text{Sugestão: mostre primeiramente}$$

que,  $\psi = \psi_1 + \psi_2 = A[e^{-i\delta/2} + e^{i\delta/2}]e^{i(\omega t + \delta/2)}$ , em seguida escreva as exponenciais complexa entre colchetes na

forma trigonométrica. Escreva a distribuição de intensidades do padrão de interferência  $I = |\psi|^2$ , e observe que a

diferença de fase entre as duas ondas pode ser escrita na forma  $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \text{sen}\theta$ ).



14- Referindo-se ao princípio da incerteza de Heisenberg, dê exemplo de algum caso em que o processo de medida perturba o sistema que está sendo medido.



15- Dê uma justificativa à partir do princípio da incerteza de Heisenberg ( $\Delta E \Delta t \geq \hbar/2$ ) que a energia de um oscilador harmônico não pode ser nula. (Sugestão: Será que o período de um oscilador pode ser infinito? Pense nisso).

16- Qual seria a voltagem aceleradora dos elétrons em um microscópio eletrônico necessária para que se tenha a mesma resolução máxima que pode ser obtida em um "microscópio de raios  $\gamma$ " usando raios  $\gamma$  de  $0.2 \text{ MeV}$  ?

17- A resolução máxima atingida por um microscópio é limitada apenas pelo comprimento de onda utilizado, isto é, o menor detalhe que se pode distinguir é aproximadamente igual ao comprimento de onda. Suponhamos que se queira ver o interior de um átomo de diâmetro  $1.0 \text{ \AA}$ , com detalhes da ordem de  $0.1 \text{ \AA}$ . (a) Se usarmos um microscópio eletrônico, qual seria a energia mínima necessária para os elétrons? (b) Se usarmos um microscópio óptico, qual seria a energia mínima para os fótons? Em que região do espectro eletromagnético estão esses fótons? (c) Qual dos microscópios seria mais prático para esse objetivo? Explique.

18- Mostre que para uma partícula livre pode-se escrever a relação de incerteza também na forma  $\Delta \lambda \Delta x \geq \lambda^2 / 4\pi$ , onde  $\Delta x$  é a incerteza na posição da onda e  $\Delta \lambda$  é a incerteza simultânea no comprimento de onda.

19- Mostre que se a incerteza na posição de uma partícula for aproximadamente igual a seu comprimento de onda de de Broglie, então a incerteza em sua velocidade é aproximadamente igual a sua velocidade.

20- Um microscópio óptico é utilizado para localizar um elétron em um átomo em uma região de dimensão linear de  $0.2 \text{ \AA}$ . Qual é a incerteza na velocidade de um elétron localizado dessa forma?

21- Uma partícula de massa  $m$  está confinada em uma região unidimensional de comprimento  $a$ . Use o princípio da incerteza para obter uma expressão para a energia mínima da partícula. Calcule o valor dessa energia para uma gota de massa  $m = 1 \text{ g}$  mantida sobre um fio de comprimento  $a = 10 \text{ cm}$ , e para um elétron em uma região de comprimento  $a = 0,1 \text{ nm}$ .

22- (a) Considere um elétron em algum ponto dentro de um átomo de diâmetro  $1 \text{ \AA}$ . Qual é a incerteza no momento do elétron? Esse resultado é consistente com a energia de ligação de elétrons em átomos? Pense em termos de energias das transições atômicas pertencente a região visível do espectro eletromagnético. (b) Imagine que um elétron esteja em algum ponto no interior de um núcleo de  $10^{-12} \text{ cm}$ . Qual é a incerteza no momento do elétron? Esse resultado é consistente com a energia de ligação de partículas constituintes do núcleo? Pense em termos de energias das transições nucleares pertencente a região dos raios  $X$  e  $\gamma$  do espectro eletromagnético. (c) Considere um nêutron, ou um próton, no interior desse núcleo atômico. Qual é a incerteza no momento do nêutron, ou do próton? Esse resultado é consistente com a energia de ligação de partículas constituintes do núcleo?

23- A vida média de um estado excitado de um núcleo é normalmente de cerca de  $10^{-12} \text{ s}$ . Qual é a incerteza na energia do fóton de raio  $\gamma$  emitido?

24- um garoto no alto de uma escada de altura  $H$  está jogando bolas de gude de massa  $m$  em uma fenda existente no solo. Para atingi-la, ele utiliza um equipamento que tem a maior precisão possível. (a) Mostre que as bolas de gude vão deixar de atingir a fenda por uma distância em média da ordem de  $x \approx \left(\frac{\hbar}{m}\right)^{1/2} \left(\frac{H}{g}\right)^{1/4}$ , onde  $g$  é a aceleração da gravidade. (b) Utilizando valores razoáveis de  $H$  e  $m$ , calcule esta distância.