WECIQ 2006 - Mini-curso 1

Conceitos e Interpretações da Mecânica Quântica: o Teorema de Bell

Osvaldo Pessoa Jr.[1]

[1] Depto. de Filosofia, FFLCH, Universidade de São Paulo
Av. Prof. Luciano Gualberto, 315, 05508-900, São Paulo, SP, Brasil

opessoa@usp.br

Resumo. *Examinamos as implicações filosóficas do famoso teorema da impossibilidade de teorias de variáveis ocultas (TVOs) locais, formulado por John Bell. Iniciamos com uma introdução sucinta à Mecânica Quântica e à não-localidade, delineando as motivações do trabalho de Bell. Detemo-nos na explicação das hipóteses usadas no teorema e em alguns conceitos necessários para entendê-lo. Enfocamos então a aplicação do teorema para TVOs estocásticas e a distinção entre dois tipos de não-localidade, sendo que a violação de uma delas, a "independência de resultados", tem sido aceita como a solução realista mais plausível para o quadrilema de Bell. Destacamos que há duas abordagens gerais ao teorema de Bell, a primeira envolvendo TVOs e potencialidades, e a segunda envolvendo contrafactuais. No final, resumem-se cinco interpretações diferentes sobre as conseqüências filosóficas do teorema de Bell.*

1. Apresentação

O "teorema da impossibilidade de teorias de variáveis ocultas (TVOs) locais", apresentado por John Stuart Bell (1964), foi o mais importante resultado dos fundamentos da Teoria Quântica desde a redescoberta da interpretação dualista realista por David Bohm (1952). Como conseqüência desse teorema, e dos experimentos que mostraram que de fato as previsões da teoria quântica são corretas (em oposição à previsões das TVOs locais), tem sido comum entre os físicos a afirmação imprecisa de que "Einstein estava errado" (com relação à sua posição no célebre trabalho com Podolsky e Rosen, 1935) ou de que "a natureza é não-local". Ao mesmo tempo que o teorema de Bell tem encontrado diversas aplicações na área de informação quântica, é curioso que nenhum avanço significativo ocorreu com relação às suas conseqüências filosóficas desde 1985, quando ficou clara a distinção entre dois tipos de localidade. Este trabalho é uma introdução ao teorema de Bell, fazendo uma resenha dos resultados da literatura e propondo algumas considerações originais. Ao leitor que estiver interessado em uma apresentação mais detalhada e completa do teorema de Bell, ver Pessoa (2006, caps. 27-30).

2. Ação à Distância vs. Ação Contígua

Se um astronauta estivesse orbitando a estrela Sírio, a 8,6 anos-luz de nós, e se ele resolvesse atirar um martelo para fora da nave, o efeito gravitacional deste ato seria sentido de maneira muito tênue na Terra. Émile Borel (1914, pp. 178-80) calculou que este efeito poderia alterar o choque entre duas moléculas de um gás! Este exemplo mostra que, mesmo na Física Clássica, vivemos em um "universo indiviso".

Isaac Newton talvez não se surpreendesse com este resultado, mas ele julgaria que esta ação gravitacional seria transmitida de maneira instantânea entre a causa e o efeito. A esta concepção se dá o nome de "ação à distância". Após a teoria eletromagnética de James Maxwell e a teoria da gravitação de Albert Einstein, ou seja, em torno de 1920, o que ainda podemos chamar de Física Clássica (em oposição à Mecânica Quântica) já havia incorporado a idéia de Michael Faraday de que as ações se transmitem de maneira contígua, "local", de um ponto para outro encostado nele, a uma velocidade finita (nunca superior à velocidade da luz no vácuo). Teorias deste tipo são chamadas "teorias de campo". O ato na estrela Sírio ainda afetaria causalmente um choque entre moléculas na Terra, mas este efeito demoraria 8,6 anos para chegar aqui. Ações à distância não teriam mais lugar na Física.

No entanto, na Física Quântica acontece algo parecido com a ação à distância! A isto se dá o nome de "não-localidade". Veremos, porém, que esta propriedade da teoria *não* envolve relações de causa e efeito que se propaguem a uma velocidade maior do que a da luz.

3. O Trilema Fundamental

Quais são, então, as conseqüências filosóficas do teorema de Bell? Uma resposta inicial [d'Espagnat, 1979] é que ele nos força a abandonar pelo menos uma de três teses fundamentais aceitas na Física Clássica (de em torno de 1920): "realismo", "localidade" ou "indução". Nossa tarefa então será explicar o que significam essas teses, mas, para isso, teremos antes que falar um pouco sobre a descrição de mundo da Física Quântica.

4. Apresentação Sucinta da Física Quântica

Uma maneira de apresentar sucintamente a Teoria Quântica é dizer que ela é a teoria (ou faz parte da classe de teorias) que concilia, de alguma maneira, aspectos contínuos (ondulatórios) e discretos (corpusculares). Notem que dizer que "uma entidade indivisível é ao mesmo tempo onda e partícula" é uma *contradição lógica*, pois uma onda é espalhada e divisível, ao passo que a partícula é discreta (não-espalhada) e indivisível (dentro de uma faixa de energia). Assim, conciliar aspectos contínuos e discretos não é tarefa trivial, mas é isto que a Teoria Quântica tem que de alguma maneira fazer. (Desenvolvemos esta apresentação de maneira mais cuidadosa em Pessoa 2002, cap. 1.)

Considere o experimento de Stern-Gerlach, da Fig. 1.

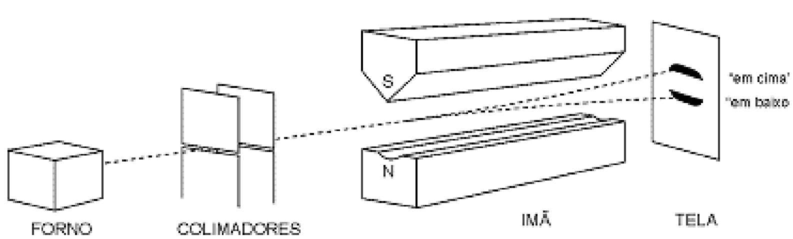

Figura 1: Aparelho de Stern-Gerlach

Um único átomo de prata passa por um imã que gera um campo magnético não-homogêneo, e tem probabilidade ½ de ser detectada “em cima” na tela fosforescente, ou “em baixo”. A primeira explicação que nos vem à mente é de que o átomo se comporta como um corpúsculo, e que no imã as pequenas flutuações existentes determinariam se o átomo segue a trajetória para cima ou para baixo.

Há porém um problema com esta interpretação corpuscular, problema este que é central na Teoria Quântica. Não poderemos explicar aqui em detalhes este problema, mas – sucintamente – o que acontece é que se retirássemos a tela detectora e recolimássemos os feixes de forma que eles adentrassem um segundo aparelho de Stern-Gerlach, o estado final do feixe seria igual ao estado inicial, e não igual ao estado de um átomo que é detectado na posição “em cima” (ou na posição “em baixo”).

5. Colapsos Não-Locais na Interpretação Realista Ondulatória

Esta possibilidade de que os feixes possam ser recombinados e um fenômeno de interferência possa ser observado favorece a interpretação segundo a qual *existe uma onda* associada ao átomo que passa pelo imã, uma onda que se divide entre as duas trajetórias indicadas na figura.

Uma primeira interpretação “realista” – ou seja, que concebe que entidades não-observáveis também tenham propriedades bem definidas – da Teoria Quântica (afora a corpuscular ingênua que vimos acima) supõe que a ontologia do mundo é apenas ondulatória, não havendo partículas. O que parece ser uma partícula seria, na verdade, um pacote de onda bem apertado, conforme mostrado na Fig. 2. Após passar pelo imã de Stern-Gerlach, a onda se divide simetricamente entre os dois caminhos possíveis. Note que, na figura, há uma flechinha associada a cada ondinha, representando a propriedade chamada “spin”, significando que cada átomo pode ser concebido como um minúsculo imã (ou seja, tem momento magnético). Na interpretação indicada da Fig. 2, o spin do átomo é concebido como uma propriedade ondulatória do átomo.

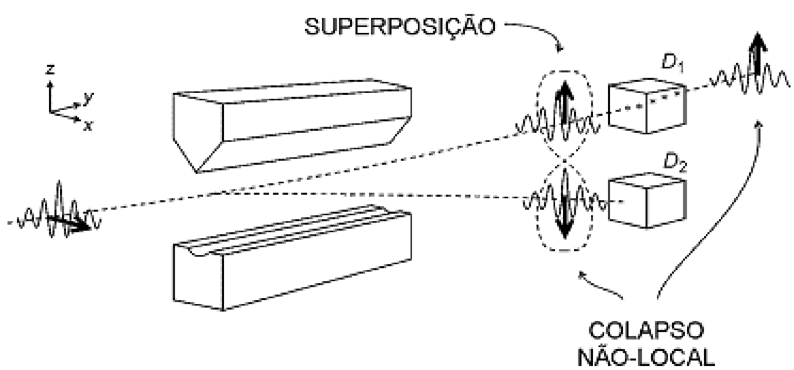

Figura 2: Experimento de Stern-Gerlach para um único átomo, segundo a interpretação ondulatória.

Após a divisão (“análise”) do feixe, ocorre a medição propriamente dita, que envolve detecção e amplificação. Ao invés de utilizar uma tela fosforescente, que absorve o átomo, consideremos um par de detectores (por exemplo, câmaras de nuvens para átomos ionizados) que deixa o átomo passar *com o menor distúrbio possível*. Um dos detectores irá acusar a passagem do átomo, enquanto que o outro não. Assim, após a medição, poderemos associar uma trajetória ao átomo (antes da medição não podíamos, pelo menos de acordo com esta interpretação ondulatória). A transição entre a onda espalhada (sem trajetória definida) para a onda espacialmente localizada recebe o nome de "colapso".

Um problema com este colapso é que ele é *não-local*. Isso fica mais claro se imaginarmos que as duas amplitudes de onda desenhadas na Fig. 2 (antes da detecção) sejam separadas a uma grande distância, e que só então uma medição seja feita em cada uma delas. Segundo esta interpretação ondulatória, *imediatamente* após a detecção de uma das amplitudes, a outra desaparece! Tal efeito se propagaria instantaneamente entre as duas amplitudes, e portanto seria não-local. Esta característica é problemática, e explica (em parte) porque a interpretação ondulatória com colapsos não foi aceita na década de 1920.

Com efeito, a interpretação que se tornou dominante baseou-se no conceito de "complementaridade", e ela evitou paradoxos como o do colapso não-local simplesmente suspendendo o juízo acerca de qualquer parte não-observada da realidade. Ou seja, segundo esta interpretação "positivista" (anti-realista), só faria sentido se referir à realidade *observada*, como as ionizações dos detectores, e não ao estado quântico $|\psi\rangle$. Os colapsos seriam meramente "reduções de estado", reduções formais, simbólicas, e não reais. Assim, a não-localidade associada aos colapsos não seriam problemáticas.

6. Uma Interpretação Realista aparentemente sem Colapsos Não-Locais

Haveria uma interpretação realista sem colapsos não-locais? Em 1926, Louis de Broglie propôs que, além das ondas (mencionadas anteriormente), existiriam também corpúsculos, e seriam estes que apareceriam nos detectores (ver Fig. 3). Os efeitos de interferência, que surgem quando os feixes são recombinados (antes de qualquer medição), seriam explicados pelas ondas. Quando ocorre uma medição, *não ocorre colapso*! Onde houver corpúsculo, aparece uma trajetória no detector; onde não houver corpúsculo, temos uma "onda vazia", que não carregaria energia mas se propagaria eternamente. Esta "onda vazia" é um conceito estranho mas, pelo menos, nesta interpretação dualista realista parece que não há problemas com a violação da localidade! (Vale mencionar que a detecção do corpúsculo introduz uma defasagem aleatória na onda associada, uma perda de coerência, de tal forma que qualquer efeito de interferência, proveniente da recombinação dos feixes, desaparece quando ocorre uma medição em um dos feixes.)

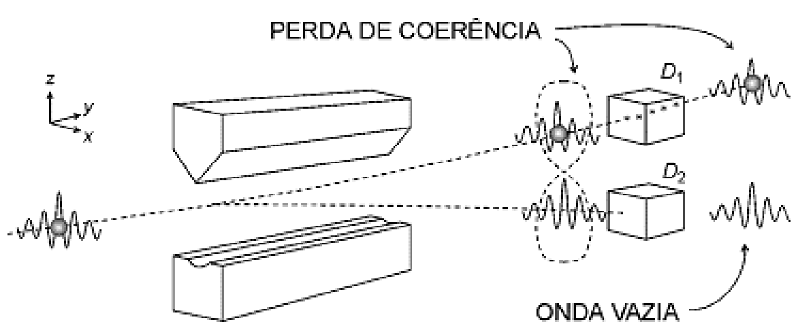

Figura 3: Experimento de Stern-Gerlach segundo a interpretação dualista realista.

De Broglie abandonou sua interpretação da "onda piloto" devido a diversas críticas que recebeu em 1927, especialmente de Wolfgang Pauli. Em 1951, porém, o norte-americano David Bohm redescobriu sua interpretação, e quando se deparou com os problemas levantados pelos críticos, conseguiu resolvê-los estendendo as variáveis ocultas (ou seja, as posições dos corpúsculos) também para o próprio aparelho de medição. Teríamos enfim uma interpretação *realista local* consistente com a Teoria Quântica?

7. Anticorrelação Perfeita

Não! Bohm salientou claramente que sua teoria se tornava *não-local* quando houvesse *duas* partículas correlacionadas.

Exemplificaremos isso fazendo um resumo (na seção 8) do famoso paradoxo de Einstein, Podolsky & Rosen (EPR), formulado em 1935. Antes, porém, precisamos descrever um comportamento sui generis de um par de partículas quânticas, a *anticorrelação perfeita* (Fig. 4), que é propriedade de um estado quântico particular de duas partículas, o estado de "singleto". Na Fig. 4, vemos que um par de partículas foi emitido da posição O, passa por imãs de Stern-Gerlach orientados na mesma direção a, e é finalmente detectado. Na figura, o par da esquerda (de número 1) foi detectado em cima, fornecendo o resultado $I = +1$, enquanto que o par da direita (de número 2) foi detectado em baixo, com resultado $II = -1$, oposto ao da outra partícula. A anticorrelação perfeita exprime o fato de que estes resultados são sempre opostos, ou seja, o produto é $I \cdot II = -1$. Se o resultado da esquerda tivesse sido diferente, o da direita também seria.

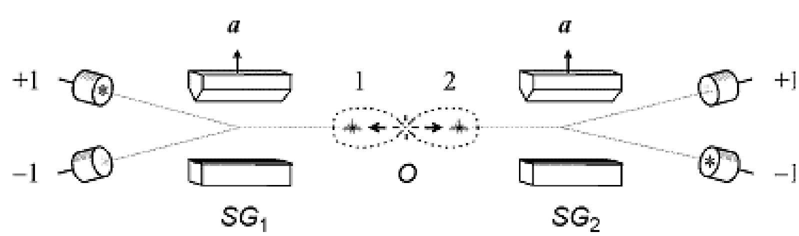

Figura 4: Ilustração da anticorrelação perfeita exibida pelo estado de singleto.

Até aqui, este comportamento não é estranho, podendo ocorrer com partículas clássicas que obedecem a um princípio de conservação, como a conservação de momento angular (que se aplica em nosso exemplo). O que é sui generis, no caso quântico, é que este comportamento se verifica para *qualquer orientação a* dos aparelhos de Stern-Gerlach! Ou seja, logo depois que o par de partículas foi emitido em O, o cientista pode colocar rapidamente os dois aparelhos em qualquer orientação que ele queira (sendo a mesma orientação para o par de aparelhos), e o que se observará será a anticorrelação perfeita. (Para simplificar, estamos supondo que os detectores têm eficiência máxima, o que não ocorre na prática.)

Esta propriedade de anticorrelação perfeita para todos os ângulos não pode ser obtida "classicamente", isto é, por uma teoria realista local, e a demonstração disso é justamente o conteúdo do teorema de Bell!

Como o par de partículas quânticas no estado de singleto tem esta propriedade incrível, atribui-se um nome especial para os estados que a possuem: eles são chamados de estados “emaranhados”, o que vem do termo *entangled state* em inglês. Se supormos que o formalismo da Teoria Quântica é “completo” (ou seja, descreve corretamente toda a realidade física, como supõem a interpretação da complementaridade e também a ondulatória, que esboçamos na seção 5), concluímos que o spin (a flechinha) de cada partícula do par *não está definido* antes da detecção, não está apontando para nenhuma direção. É apenas após a detecção que ocorre uma redução (colapso) para estados individuais de spin bem definido.

8. Não-Localidade na Teoria Realista Dualista

Mostraremos agora porque Bohm concluiu que sua interpretação dualista realista é *não-local* para um par de partículas emaranhadas, acabando com as esperanças iniciais de que a teoria da onda-piloto de Louis de Broglie (seção 6) pudesse ser local. Faremos isso considerando a adaptação que Bohm (1951, pp. 611-23) fez, para pares de partículas correlacionadas de spin ½, do paradoxo de Einstein, Podolsky & Rosen (Fig. 5).

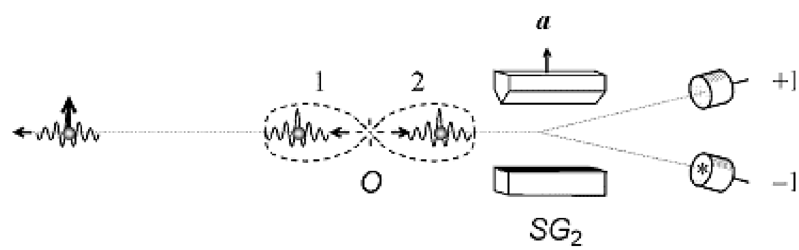

Figura 5: Montagem do paradoxo de EPR com duas partículas de spins correlacionados.

Imaginemos que o par de partículas seja emitido do ponto *O*, em um foguete entre a Terra e a Lua, e que a medição na partícula 2 se dê na Terra, enquanto que a partícula 1 chega na Lua. Se na Terra eu resolvesse medir o spin na direção *a* (obtendo o valor +1 ou –1), a Teoria Quântica diz que na Lua a partícula teria *imediatamente* (devido à redução de estado) seu spin bem definido na mesma direção *a* (com valor –1 ou +1, respectivamente). Porém, logo antes de a partícula chegar na superfície da Terra, eu poderia mudar a orientação do imã para a direção *b*. Neste caso, quando a medição fosse completada na fração de segundo subseqüente, o que passaria a ter realidade na Lua seria o spin na direção *b*, não na direção *a*! Einstein, Podolsky & Rosen partiram do princípio de que não existe ação à distância (não existem influências instantâneas, não-locais), e assim concluíram que as duas realidades – spin na direção *a* e spin na direção *b* – coexistiriam na Lua (pois não daria tempo de um efeito causado pela rotação do imã chegar na Lua). Como a interpretação ortodoxa da Teoria Quântica não atribui realidade simultânea a grandezas “incompatíveis” como spin na direção *a* e na direção *b* (em outras palavras, os observáveis associados a estes spins são limitados por uma relação de incerteza), concluíram que a teoria quântica seria *incompleta*.

Apesar de Bohm concordar que a teoria quântica ortodoxa (sem variáveis ocultas) era incompleta, sua análise da montagem de EPR (Fig. 4) era diferente. Sua conclusão foi de que existiria uma influência causal instantânea entre a medição na partícula 1 e o estado da partícula 2. Ou seja, ao contrário de EPR, Bohm *aceitou a não-localidade*.

9. Generalização da Não-Localidade para qualquer Interpretação Realista

O próximo personagem em nossa história é o norte-irlandês John Stuart Bell. Ele estudou o trabalho de Bohm, como alguns outros fizeram, mas ficou admirado que as fórmulas que fornecem as velocidades das partículas exibem "o traço curioso de ter em geral um caráter flagrantemente não-local" [Bell, 1966]. Fez então a pergunta "correta": será que o traço não-local da teoria realista de Bohm seria uma característica de *qualquer* teoria realista local? Em poucas semanas, mostrou que sim! Derivou uma prova de impossibilidade para *teorias de variáveis ocultas locais*.

O termo "teoria de variáveis ocultas" (TVO) cobre justamente as interpretações realistas que temos visto. No caso da teoria de de Broglie-Bohm, as variáveis "ocultas" (ou "escondidas") são as posições dos corpúsculos e também suas velocidades a cada instante (estas, porém, poderiam ser calculadas a partir das posições, desconhecidas, e da função de onda, conhecida). As variáveis ocultas podem ser representadas genericamente por um conjunto de números λ. No caso da interpretação ondulatória (seção 5), se supormos que os colapsos sejam aleatórios, teremos um exemplo de um tipo mais "fraco" de TVO, chamado "teoria de variáveis ocultas estocásticas", que examinaremos mais adiante. Uma teoria de variáveis ocultas constitui uma interpretação *realista* porque ela atribui valores bem definidos para variáveis λ que em geral não são observadas; a atitude oposta, positivista, diria que não faz sentido atribuir valores para variáveis que não podem ser observadas.

A prova de impossibilidade de Bell afirma que qualquer TVO (ou seja, qualquer teoria *realista*) que seja *local* é limitada por uma desigualdade do seguinte tipo (cujos termos explicaremos na seção seguinte):

$$\left| \, c(a,b) + c(a,b') + c(a',b) - c(a',b') \, \right| \leq 2 \quad . \qquad (1)$$

Ora, mostrou Bell, a Mecânica Quântica prevê que haja situações em que esta desigualdade é violada! Portanto, se a Teoria Quântica estiver correta, *TVOs locais são impossíveis*!

Esta é uma conclusão realmente impressionante para aqueles poucos que tinham a esperança de construir uma teoria realista local, como esboçada na seção 6. Tal resultado não deveria afetar a interpretação ortodoxa, positivista, mas de fato, paradoxalmente, ele iniciou uma nova era nos fundamentos da Mecânica Quântica, uma era marcada por uma reação realista contra a velha ortodoxia.

10. Coeficientes de Correlação e a Previsão da Mecânica Quântica

O que são os termos $c(a,b)$ que aparecem na desigualdade de Bell? Eles são chamados *coeficientes de correlação*, e exprimem como os resultados obtidos para uma das partículas se correlacionam com os resultados obtidos para a outra partícula. Vejamos três casos simples:

- Se, para cada par de partículas, ambos os detectores sempre fornecerem o mesmo resultado, então $c(a,b) = 1$.
- Se os resultados forem sempre opostos, resultando na anticorrelação perfeita (que vimos na seção 7), então $c(a,b) = -1$.
- Se o resultado de um independer do outro, então $c(a,b) = 0$.

Notemos que o coeficiente de correlação é uma média sobre todas as medições n do produto $I_n \cdot II_n$ envolvendo os resultados (–1 ou 1) obtidos para ambas as partículas. Ou seja, se os dois resultados forem sempre os mesmos, o produto será sempre 1, e a média será simplesmente $c(a,b) = 1$. Se os resultados forem sempre opostos, o produto será –1, e teremos $c(a,b) = -1$. No terceiro caso, em que os resultados são independentes, o produto $I_n \cdot II_n$ às vezes será 1, às vezes –1, de forma que a média acaba sendo próxima de zero: $c(a,b) = 0$. O coeficiente de correlação exprime assim a probabilidade conjunta de obter os mesmos resultados para ambas as partículas, podendo assumir qualquer valor entre –1 e 1.

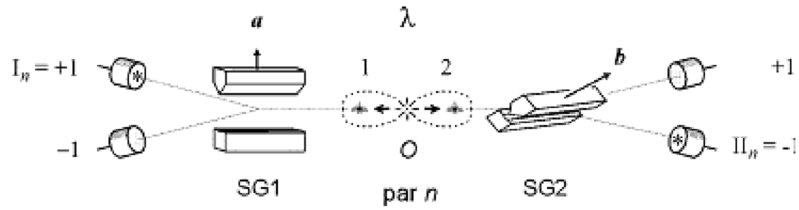

Figura 6: Arranjo experimental para testar o teorema de Bell, com imãs de Stern-Gerlach orientados em ângulos diferentes a, b.

Já mencionamos que há um estado, chamado "singleto", que exibe anticorrelação perfeita, $c(a,a) = -1$, e invariância rotacional, ou seja, suas propriedades não mudam qualquer que seja a orientação (igual) dos pares de imãs ($\forall a$). Podemos escrever este estado de singleto da seguinte maneira:

$$\left|\Psi_s\right\rangle \;=\; \tfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left|\sigma_{+z}\right\rangle_1 \otimes \left|\sigma_{-z}\right\rangle_2 \;-\; \tfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left|\sigma_{-z}\right\rangle_1 \otimes \left|\sigma_{+z}\right\rangle_2 \quad . \tag{2}$$

Do lado direito da equação há dois termos (uma superposição), cada qual correspondendo a uma das possibilidades de medição com imãs orientados na direção z. Por exemplo, se a medição na partícula 1 resultar no resultado +1, o estado de (2) se reduz para o seguinte estado:

$$\left|\Psi_r\right\rangle \;=\; \left|\sigma_{+z}\right\rangle_1 \otimes \left|\sigma_{-z}\right\rangle_2 \quad . \tag{3}$$

Ora, este estado reduzido indica claramente que o resultado a ser obtido na outra partícula (de número 2) será –1, pois esta partícula estaria agora no autoestado $|\sigma_{-z}\rangle_2$ do observável de spin (componente na direção z) sendo medido, cujo autovalor é –1.

Para o estado de singleto, o cálculo do coeficiente de correlação de acordo com a Teoria Quântica fornece o seguinte resultado:

$$c_{\Psi s}(a,b) \;=\; -\cos(\theta_{ab}) \;, \tag{4}$$

onde θ_{ab} é o ângulo entre a e b.

Podemos assim calcular qual é a previsão da Teoria Quântica para a desigualdade de Bell em (1). Note que nesta expressão há quatro coeficientes, envolvendo os ângulos a, a', b, b'. Se tomarmos o caso particular em que $a=b$, ou seja $\theta_{ab} = 0$, e além disso $\theta_{ab'} = \theta_{a'b} = 60°$, e $\theta_{a'b'} = 120°$, o termo à esquerda na desigualdade (1) torna-se 2,5 , que é maior do que 2.

Em outras palavras, a Teoria Quântica prevê que haja situações que violem a desigualdade de Bell! Mas qualquer TVO local é limitada por esta desigualdade. Portanto, há situações previstas pela Mecânica Quântica que não podem ser explicadas por teorias realistas (TVOs) locais. Experimentos nos anos 70 comprovaram, supondo-se certas hipóteses, que tais situações existem, de forma que qualquer teoria realista local, limitada pela desigualdade de Bell, deve ser descartada (ver a resenha de [Clauser & Shimony, 1978], e os experimentos do grupo de Aspect, resumidos em [Aspect & Grangier, 1986]).

Examinaremos adiante esta situação com mais cuidado, para verificar exatamente quais são as hipóteses sendo usadas e quais delas seriam responsáveis pela imposição da desigualdade de Bell.

11. Como se deriva a Desigualdade de Bell?

De um ponto de vista mais filosófico e geral (ou seja, sem nos preocuparmos com as estratégias matemáticas de derivação de diferentes versões da desigualdade), existem duas abordagens principais para se obter a desigualdade de Bell.

1) A primeira abordagem básica pressupõe a existência de teorias de variáveis ocultas locais. Tais TVOs locais podem ser de dois tipos: (a) com "determinismo nas medições"; (b) TVOs estocásticas. Examinaremos estas abordagens a seguir.

2) A segunda abordagem pressupõe a existência de "contrafactuais", com os quais se faz uma definição adequada de localidade. Esta forma de derivar a desigualdade de Bell tem a vantagem de não pressupor a existência de variáveis escondidas, de maneira que ela pode ser considerada mais próxima da atitude positivista. No entanto, ela nos leva a uma discussão metafísica a respeito da realidade de mundos possíveis que não se realizam (ou seja, que são contrários aos fatos, "contrafactuais"). Não abordaremos esta abordagem aqui, mas o leitor interessado pode consultar Pessoa (2004).

12. TVOs Locais com "Determinismo nas Medições"

O estímulo inicial para se proporem teorias de variáveis ocultas foi a possibilidade de que, conhecendo-se o estado quântico $|\psi\rangle$ e as variáveis ocultas λ, todo resultado de qualquer medição poderia ser calculado. É claro que na prática ninguém poderia conhecer as variáveis λ (supondo que elas existíssem), mas em princípio poder-se-ia conceber um ser onisciente que tivesse esta capacidade. Esta determinação do resultado de uma medição, obtida a partir de $|\psi\rangle$ e λ, pode ser chamada de "determinismo nas medições". A negação desta condição, de forma que $|\psi\rangle$ e λ fornecessem apenas as *probabilidades* dos resultados das medições, constituem as "TVOs estocásticas", a serem examinadas na seção 15.

Consideremos a classe de TVOs que satisfazem o "determinismo nas medições" e consideremos o experimento envolvendo duas partículas de spin ½ correlacionados (Fig. 6). (Estamos aqui adaptando a prova simplificada apresentada por Redhead, 1987, pp. 82-6.) Para um par de partículas n e orientações a, b dos aparelhos de Stern-Gerlach, as variáveis ocultas λ determinariam univocamente *todos* os resultados possíveis (mesmo contrafactuais) I (da partícula 1) e II (da partícula 2). Ou seja, $I_n(a,b,\lambda)$, $II_n(a,b,\lambda)$, $I_n(a,b',\lambda)$, etc. seriam todos bem definidos, mesmo antes de completada a medição.

Pois bem, nesta situação poderia ocorrer que $I_n(a,b,\lambda) \neq I_n(a,b',\lambda)$, isto é, o resultado I_n (obtido por exemplo na Lua) dependeria da orientação do outro aparelho (orientado ou em b ou em b') localizado à distância (na Terra). Essa desigualdade então exprime uma condição de *não-localidade*!

Ora, já sabemos que o teorema de Bell se aplica para TVOs *locais*. Para exprimir isto matematicamente, negamos a desigualdade do parágrafo anterior e impomos que $I_n(a,b,\lambda) = I_n(a,b',\lambda) = I_n(a,\lambda)$, e analogamente para $I_n(a',\lambda)$, $II_n(b,\lambda)$ e $II_n(b',\lambda)$. Eis então a condição de localidade para TVOs com "determinismo nas medições".

Para se derivar a desigualdade de Bell (1), lembremos (da seção 10) que o coeficiente de correlação $c(a,b)$ é a média do produto $I_n \cdot II_n$ dos resultados (1 ou –1) das medições para cada partícula, com os aparelhos de Stern-Gerlach orientados nas direções a e b. Assim, para obter o lado esquerdo da desigualdade de Bell, consideramos a média da seguinte grandeza (onde escrevemos de forma explícita as dependências em a, b e λ):

$$I_n(a,b,\lambda)\cdot II_n(a,b,\lambda) + I_n(a,b',\lambda)\cdot II_n(a,b',\lambda) + \\ + I_n(a',b,\lambda)\cdot II_n(a',b,\lambda) - I_n(a',b',\lambda)\cdot II_n(a',b',\lambda) \tag{5}$$

Mas, conforme acabamos de discutir, queremos impor a condição de *localidade*, o que transforma os oito coeficientes acima em quatro. A expressão resultante, escrita abaixo, só pode ser igual a 2 ou a –2, conforme os valores de $I_n(a,\lambda)$, $I_n(a',\lambda)$, $II_n(b,\lambda)$ e $II_n(b',\lambda)$ (que só podem ser 1 ou –1):

$$I_n(a,\lambda)\cdot II_n(b,\lambda) + I_n(a,\lambda)\cdot II_n(b',\lambda) + I_n(a',\lambda)\cdot II_n(b,\lambda) - I_n(a',\lambda)\cdot II_n(b',\lambda) = \pm 2$$

Ora, ao se fazer a média da expressão do lado esquerdo, para diferentes pares de medição n, obtém-se um resultado cujo valor máximo é 2 (para o caso extremo em que todos os pares de partículas levem ao resultado 2) e o valor mínimo é –2 (no outro caso extremo), sendo que é mais provável que se obtenha um valor médio entre –2 e 2. Essa conclusão pode então ser expressa da seguinte maneira, que é justamente a desigualdade de Bell (1):

$$\left| \, c(a,b) + c(a,b') + c(a',b) - c(a',b') \, \right| \leq 2 \ .$$

Esta desigualdade não é versão original derivada por Bell (ver a eq. 17, na seção 21, abaixo), mas foi derivada por Clauser, Horne, Shimony & Holt (1969).

13. A Hipótese da Indução

Se quisermos testar experimentalmente a desigualdade acima, medindo $c(a,b) + c(a,b') + c(a',b) - c(a',b')$, é preciso fazer quatro experimentos como os da Fig. 6, cada qual com um grande número de pares de partículas. Lembremos que estamos no contexto de uma TVO, de forma que estamos supondo que existam variáveis ocultas λ que determinam os resultados de medições. Os valores de λ variam para cada par de partícula (o que explicaria porque os resultados podem ser diferentes de um par para outro), mas supõe-se que exista uma função de distribuição $\rho_{\psi s}(\lambda)$ de variáveis ocultas para o estado de singleto $|\psi_s\rangle$.

Pois bem: o que garante que, quando mudamos a posição dos aparelhos de Stern-Gerlach para realizar as quatro corridas de dados, a função de distribuição $\rho_{\psi s}(\lambda)$ se mantém constante? Nada garante. No entanto, precisamos desta hipótese para que o teste experimental possa ser comparado com o resultado da derivação de Bell. Assim, chamaremos esta hipótese de *indução*, e de agora em diante lembraremos que ela é necessária para a derivação da desigualdade de Bell.

A hipótese da indução supõe que haja uma *amostragem justa* na realização do experimento. Imaginemos uma situação que viole esta amostragem justa. Suponha que quando o par *n* de partículas é detectado, elas deixem um "rastro" no vácuo, de tal forma que o par seguinte seja afetado pelo resultado da medição anterior. Isto violaria a hipótese da indução, e poderia fazer com que a TVO local em questão violasse a desigualdade de Bell.

A hipótese da indução recebeu este nome porque ela também está envolvida na garantia de que um número finito de medições (realizadas na prática) seja uma amostra justa da situação teórica que vale para uma série de medições que tende para infinito.

14. O Trilema Fundamental Revisitado: um Quadrilema

Na seção 3 mencionamos o trilema fundamental do teorema de Bell, que pode ser expresso da seguinte forma:

$$\begin{array}{c} \text{Realismo, Localidade, Indução} \\ \text{(Med. Fidedigna)} \end{array} \Rightarrow \text{Desigualdade de Bell} \qquad (6)$$

Incluímos uma quarta hipótese, a das "medições fidedignas", que supõe que o resultado de uma medição é numericamente igual ao valor possuído pelo observável imediatamente antes da medição. Essa suposição é tão próxima à hipótese do realismo que ela é usualmente incorporada nesta. Não a mencionaremos mais neste artigo.

Vimos, porém, que fizemos uma hipótese adicional que não está incluída neste esquema lógico. A derivação que fizemos é válida para teorias de variáveis ocultas com "determinismo na medição". O "trilema" fundamental é na verdade um "quadrilema":

$$\begin{array}{c} \text{Realismo, Localidade, Indução} \\ \text{Determinismo nas Medições} \end{array} \Rightarrow \text{Desigualdade de Bell} \qquad (7)$$

Como a desigualdade de Bell é violada, devemos rejeitar uma (ou mais) das hipóteses que estão do lado esquerdo de (7). Se tivermos simpatia por interpretações realistas e quisermos salvar a localidade, talvez seja suficiente rejeitarmos o "determinismo nas medições". É isto que examinaremos a seguir.

15. Teoria de Variáveis Ocultas Estocástica Local

O abandono do "determinismo nas medições" leva a uma classe de TVOs chamada "estocástica". Nesta, as variáveis ocultas (juntamente com o estado quântico) não determinam univocamente os resultados das medições, mas fornecem apenas probabilidades para diferentes resultados.

Para que serve uma TVO estocástica? A motivação por trás das teorias de variáveis ocultas não era justamente a capacidade de determinar univocamente os resultados das medições? Uma TVO que só fornece probabilidades recairia no tiquismo (probabilismo) próprio da Teoria Quântica. Qual seria então o interesse nela?

O interesse é que TVOs estocásticas locais também levam a uma desigualdade de Bell, como mostrou Bell (1971) e Clauser & Horne (1974). Ou seja, se tentarmos resolver o quadrilema fundamental (7) abandonando o "determinismo nas medições", mesmo assim a desigualdade ressurge. No entanto, veremos na seção seguinte que uma nova hipótese acaba sendo introduzida. O que faremos agora é examinar um pouco mais as vantagens de se considerar TVOs estocásticas. Salientaremos dois pontos.

Primeiro, conforme já mencionamos, a forma com que as previsões das TVOs estocásticas são fornecidas é idêntica ao que ocorre no caso da Teoria Quântica, ou seja, ambas fornecem *probabilidades*. Como as variáveis λ não determinam univocamente os resultados, é possível identificar tais variáveis com o próprio estado quântico $|\psi\rangle$ do sistema! Ou seja, os números que definem o estado quântico podem ser considerados variáveis ocultas, que inclusive são invariantes ante mudanças no observável sendo medido! Assim, TVOs estocásticas seriam uma classe geral de teorias que têm como caso particular a Teoria Quântica!

Esta conclusão é surpreendente: a Teoria Quântica seria uma TVO estocástica não-local? Isso significaria que o teorema de Bell limitaria qualquer interpretação da Mecânica Quântica? Não é bem assim. É possível interpretar a Teoria Quântica de tal forma que ela não seja englobada por essa classe de TVOs estocásticas, desde que ela seja interpretada de maneira positivista. Interpretações positivistas da Mecânica Quântica negam que faça sentido atribuir realidade para $|\psi\rangle$ (o estado seria apenas um construto teórico, abstrato), de forma que não faria sentido afirmar a existência de variáveis ocultas, mesmo as que atuam estocasticamente. A conclusão de que a Teoria Quântica seja não-local significaria apenas que certas entidades abstratas (λ) atuam na teoria de maneira não-local, o que nada diz sobre uma suposta não-localidade da natureza.

Uma segunda motivação para TVOs estocásticas surge do fato de elas serem consistentes com as TVOs definidas com "determinismo nas medições". As variáveis ocultas λ da TVO estocástica poderiam formar um conjunto incompleto de variáveis, que se "completariam" (reinstaurando o determinismo nas medições) com variáveis adicionais localizadas em alguma parte, por exemplo nos aparelhos de medição. Para dar um exemplo, consideremos o valor possuído para o componente de spin na direção a, para uma única partícula: $I(a,\lambda)$. Segundo o determinismo nas medições, o valor $I(a,\lambda)$ vai depender unicamente de λ e da orientação a do analisador macroscópico. Ora, podemos supor que o aparelho macroscópico também tem variáveis ocultas próprias $\lambda_{\boldsymbol{a}}$ que flutuam ao sabor de suas interações com o ambiente externo. A cada medição com o analisador de Stern-Gerlach orientado em a e com a variável oculta possuindo o valor λ, as variáveis $\lambda_{\boldsymbol{a}}$ poderão adquirir valores diferentes, afetando assim o resultado de $I(a,\lambda,\lambda_{\boldsymbol{a}})$. Teríamos assim um versão "criptodeterminista" (ou seja, com um determinismo escondido) para uma TVO estocástica.

16. Dois Tipos de Não-Localidade

Vejamos agora as conseqüências de se derivar a desigualdade de Bell para TVOs locais estocásticas. Uma maneira de derivar a desigualdade parte da probabilidade conjunta $\text{Prob}_{\sigma_{1a},\sigma_{2b}}(I,II,\lambda)$ de medir o observável σ_{1a} e ele possuir o valor I (que pode ser –1 ou +1), de medir σ_{2b} e ele possuir o valor II, e da variável oculta possuir o valor λ. (Estamos simplificando aqui a apresentação de [Redhead, 1987, pp. 98-107].)

A probabilidade conjunta pode ser escrita como um produto de probabilidades condicionais:

$$\text{Prob}_{\sigma_{1a},\sigma_{2b}}(I,II,\lambda) = \text{Prob}_{\sigma_{1a},\sigma_{2b}}(I\,/\,II\ \&\ \lambda)\cdot\text{Prob}_{\sigma_{1a},\sigma_{2b}}(II\,/\,\lambda)\cdot\rho(\lambda)\,. \qquad (8)$$

A *probabilidade condicional* $\text{Prob}_{\sigma_{1a},\sigma_{2b}}(I\,/\,II\ \&\ \lambda)$, por exemplo, designa a probabilidade de σ_{1a} ter o valor I, *dado que* σ_{2b} tem o valor II e a variável oculta o valor λ. O termo $\rho(\lambda)$ é a densidade de probabilidade das variáveis ocultas (que mencionamos na seção 13).

Para derivar a desigualdade de Bell, precisamos inserir a condição de localidade, mas veremos que neste caso há dois tipos de não-localidade. A primeira suposição a ser feita, com relação ao termo $\text{Prob}_{\sigma_{1a},\sigma_{2b}}(I\ /\ II\ \&\ \lambda)$, é que a probabilidade de obter o valor *I* para a partícula 1 independe do *valor II* obtido para a partícula 2. Ou seja:

$$\text{Prob}_{\sigma_{1a},\sigma_{2b}}(I\,/\,II\ \&\ \lambda) \;=\; \text{Prob}_{\sigma_{1a},\sigma_{2b}}(I\,/\lambda)\ . \tag{9}$$

Esta hipótese foi chamada por Jarrett (1984) de "completeza", no sentido que λ basta para determinar de maneira completa a probabilidade $\text{Prob}_{\sigma_{1a},\sigma_{2b}}(I\ /\ II\ \&\ \lambda)$. Shimony (1984) introduziu um termo melhor, *independência de resultado*, para exprimir esta localidade incontrolável.

O segundo tipo de não-localidade supõe que a probabilidade para uma das partículas independa do *observável* sendo medido na outra. Ou seja:

$$\begin{aligned} \text{Prob}_{\sigma_{1a},\sigma_{2b}}(I\,/\,\lambda) \;&=\; \text{Prob}_{\sigma_{1a}}(I\,/\lambda)\ , \\ \text{Prob}_{\sigma_{1a},\sigma_{2b}}(II\,/\,\lambda) \;&=\; \text{Prob}_{\sigma_{2b}}(II\,/\lambda)\ . \end{aligned} \tag{10}$$

Jarrett chamou esta suposição de *localidade*, ao passo que Shimony prefere o termo *independência de parâmetro* para exprimir esta localidade controlável.

Com isso, podemos escrever (8) na seguinte forma, que é conhecida como "fatorizabilidade":

$$\text{Prob}_{\sigma_{1a},\sigma_{2b}}(I,II,\lambda) \;=\; \text{Prob}_{\sigma_{1a}}(I\,/\lambda)\cdot\text{Prob}_{\sigma_{2b}}(II\,/\,\lambda)\cdot\rho(\lambda)\ . \tag{11}$$

Esta expressão é claramente inválida na Mecânica Quântica, com relação a estados emaranhados.

A partir desta expressão, chega-se à desigualdade de Bell para TVOs locais estocásticas! Não reproduziremos aqui a dedução, mas exploraremos as conseqüências desse resultado. (Em português, pode-se consultar Chibeni 1997, pp. 62-66, 104-15.)

17. Conseqüências da Violação da Independência de Resultados

Na derivação de (11) e da desigualdade de Bell utiliza-se, além da hipótese da *localidade* (10), também a hipótese da *independência de resultados* (9), chamada às vezes de "localidade incontrolável". Seriam assim dois tipos de não-localidade. O quadrilema lógico, substituindo (7), seria agora:

Realismo, Localidade, Indução Independência de Resultados	$\Rightarrow$	Desigualdade de Bell	(12)

A rejeição da não-localidade incontrolável (independência de resultados) e aceitação da localidade controlável parece ser a posição mais aceita entre os filósofos da física. Essa conclusão às vezes é expressa como uma rejeição da *separabilidade* em oposição à aceitação da localidade [Howard, 1989].

A violação da "independência de resultados" é análogo ao que ocorre na Mecânica Quântica, segundo a interpretação ondulatória: o *resultado* obtido na medição em uma das partículas provoca um colapso não-local da função de onda (envolvendo as duas partículas), que afeta o resultado a ser obtido para a outra partícula.

Tentemos agora esclarecer melhor o que significa a independência de resultados e o que implica sua rejeição. Para isso, façamos uso do modelo criptodeterminista para as TVOs estocásticas, visto na seção precedente, que introduz, além das variáveis λ, também variáveis adicionais λ_a e λ_b associadas a cada analisador. Pois bem: neste modelo, a independência de resultados equivale a dizer que os resultados I obtidos para a partícula 1 independem das *variáveis ocultas* λ_b associadas ao aparelho de medição da partícula 2 (e analogamente para os resultados II).

Simbolicamente, de forma análoga a (9), teríamos para a *independência de resultados*:

$$I{\cdot}II(a,b,\lambda,\lambda_a,\lambda_b) \;=\; I(a,b,\lambda,\lambda_a){\cdot}II(a,b,\lambda,\lambda_b)\;. \tag{13}$$

A *localidade* se exprimiria de maneira semelhante, só que o resultado I independeria da escolha da orientação b (e analogamente para o resultado II):

$$I{\cdot}II(a,b,\, \lambda,\lambda_a,\, \lambda_b) = I(a,\, \lambda,\, \lambda_a,\, \lambda_b){\cdot}II(b,\, \lambda,\, \lambda_a,\, \lambda_b)\;. \tag{14}$$

No formalismo criptodeterminista, a violação da independência de resultados significa que existiria uma ação à distância entre as variáveis ocultas de um aparelho e os resultados obtidos no outro.

Diversos autores (por exemplo, [Berkovitz, 1998]) têm estudado esses dois tipos de não-localidade segundo as diferentes interpretações. Não está claro, por exemplo, se a Mecânica Bohmiana viola apenas um desses tipos ou os dois; alguns autores chegam até a criticar a distinção entre dois tipos de localidade feita por Jarrett. Mas qualquer que seja o tipo de não-localidade a ser rejeitada, há um certo consenso de que não existe um conflito direto com o postulado da Relatividade Restrita que limita a velocidade de propagação de sinais. Nas palavras de Abner Shimony, não haveria "ação à distância" mas "paixão à distância" entre os dois subsistemas correlacionados, resultando numa "coexistência pacífica" entre a Mecânica Quântica e a Relatividade Restrita.

18. Metafísica com Variáveis Ocultas: Potencialidades e Indeterminismo

As conseqüências filosóficas do teorema de Bell, apresentadas nas seções anteriores, refletem o estado da arte em 1985. De lá para cá, pouco se avançou, apesar de sistemas emaranhados terem adquirido uma importância tecnológica muito grande, associada a questões de transmissão de informação quântica. Conforme a interpretação adotada, o quadrilema de Bell pode ser resolvido de diferentes maneiras, rejeitando-se o realismo, a indução, a localidade controlável ou a independência de parâmetros (localidade incontrolável). Vimos, porém, que a rejeição desta última premissa é a alternativa realista mais aceita para se resolver o quadrilema.

Uma maneira de enunciar esta conclusão parte da distinção entre potencialidades (estado quântico) e atualizações (observações), introduzida por Bohm (1951), Margenau (1954) e Heisenberg (1958). No formalismo criptodeterminista, conforme acabamos de ver, a violação da independência de resultados significa que existiria uma ação à distância entre as variáveis ocultas de um aparelho e os resultados obtidos no outro. Isto pode ser interpretado como uma não-localidade no nível microscópico das potencialidades. Poderíamos concluir que *a localidade não vale no nível das potencialidades*, mas apenas no das atualizações. Veremos na seção 20 um resultado análogo envolvendo contrafactuais.

A defesa de uma não-localidade no nível das potencialidades parece trazer problemas agudos com relação à Teoria da Relatividade Restrita. Será que a violação da independência de resultados pode ser vista como uma *influência causal* entre eventos microscópicos ou variáveis ocultas? Se dermos primazia à Relatividade Restrita, nossa conclusão será que não, pois segundo esta teoria nenhuma influência causal (ou transmissão de informação) pode se dar a uma velocidade igual ou superior à da luz no vácuo. Usaremos isto agora para defender que o teorema de Bell fornece um argumento a favor da natureza aleatória ou indeterminista do mundo físico.

No exemplo de duas partículas emaranhadas emitidas do ponto *O* entre a Terra e a Lua (Fig. 6), se há um referencial no qual o par de partículas é detectado simultaneamente na Terra e na Lua, existe um referencial no qual o evento da Terra ocorre primeiro, e outro no qual a detecção na Lua ocorre primeiro. Qual seria causa de qual? Não podemos dizer que a detecção na Terra *causa* um colapso instantâneo na Lua, assim como não podemos dizer o contrário. A relação entre estes dois eventos é de outra natureza, não é de natureza causal. (Vale mencionar que esta conclusão se encaixa bem com a interpretação da causalidade como dependendo de uma intervenção, ou seja, com a máxima de que "sem controle não há causa".)

A violação da independência de resultados é simplesmente uma *correlação* entre eventos. Existe uma causa para a existência desta correlação (ou anticorrelação), que está no processo de preparação (no ponto *O* da Fig. 6). Mas não existe uma causa que possamos invocar para explicar porque o resultado I_n foi +1 e II_n foi –1 (e não o contrário). Podemos associar a este estado de coisas o termo "sincronicidade", mas ressaltando que este uso não apóia em nada a visão mística do psicanalista Carl Jung.

Se não há causa para o resultado das medições, então este deve ser um processo genuinamente aleatório, violando o princípio de razão suficiente de Leibnitz. A conclusão é que *o colapso é um processo indeterminista*. Notem, porém, que esta conclusão é independente da tese positivista, difundida por alguns defensores da interpretação ortodoxa a partir da década de 1920, segundo a qual o mundo quântico seria indeterminista, já que não há maneira de prever com exatidão o resultado de experimentos quânticos. A conclusão que estou salientando (e que já foi considerada por diversos estudiosos da não-localidade) só surge ao se considerarem duas partículas correlacionadas e ao se aceitarem as conclusões da Relatividade Restrita.

19. Conclusão: As Conseqüências Filosóficas do Teorema de Bell

Partimos de uma exposição histórica e didática das desigualdades de Bell, chegando até a definição de dois tipos de localidade, e depois empreendemos algumas especulações metafísicas. Chegou a hora de recolocarmos os pés no chão e apresentar uma conclusão para o problema proposto pelo título deste artigo: quais são as conseqüências filosóficas do teorema de Bell? Sem entrar nos detalhes que acabamos de explorar, podemos oferecer cinco opções para o leitor, cada qual dependente da interpretação que se queira adotar.

- Um *realista forte*, defensor do "determinismo nas medições" (como Bohm), precisa aceitar a não-localidade.
- Para um *realista mais fraco* que defende uma TVO estocástica, basta rejeitar a "independência de resultados" e trabalhar nas suas implicações filosóficas.
- Um *realista fraco* que admite definições *contrafactuais* precisa abandonar alguma concepção de localidade em mundos contrafactuais (ver [Pessoa, 2004]).

- Pode-se ainda ser um *realista local clássico*, rejeitando a indução ou alguma hipótese adicional usada em testes experimentais (não investigamos esta possibilidade, mas um exemplo é [Marshall *et al*., 1983].
- Já um *positivista extremo* pode dormir sossegado, sem se preocupar com a realidade por trás das observações, quer no reino das variáveis escondidas, quer no mundo dos contrafactuais.

Referências Bibliográficas

Aspect, A. & Grangier, P. (1986), "Experiments on Einstein-Podolsky-Rosen-type Correlations with Pairs of Visible Photons", in Penrose, R. & Isham, C.J. (orgs.), *Quantum Concepts in Space and Time*. Oxford: Clarendon, pp. 1-15.

Bell, J.S. (1964), On the Einstein-Podolsky-Rosen Paradox , *Physics 1*, 195-200. Reproduzido em Wheeler & Zurek (1983), *op. cit.*, pp. 403-8, e em Bell (1987), *op. cit*., pp. 14-21.

Bell, J.S. (1966), "On the Problem of Hidden Variables in Quantum Mechanics", *Reviews of Modern Physics 38*, 447-75. Reproduzido em Bell (1987), *op. cit.*, pp. 1-13. Tradução para o português em *Cadernos de História e Filosofia da Ciência* (série 3) *2(2)* (1992) 243-57.

Bell, J.S. (1971), "Introduction to the Hidden-Variable Question", in d'Espagnat, B. (org.) (1971), *Foundations of Quantum Mechanics* (Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi", course IL). Nova Iorque: Academic, pp. 171-81. Reproduzido em Bell (1987), *op. cit.*, pp. 29-39.

Bell, J.S. (1987), *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics*. Cambridge: Cambridge University Press.

Berkovitz, J. (1998), "Aspects of Quantum Non-Locality, I", *Studies in History and Philosophy of Modern Physics 29*, 183-222.

Bohm, D. (1951), *Quantum Theory*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall.

Bohm, D. (1952), "A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in terms of 'Hidden' Variables, I and II", *Physical Review 85*, 166-93. Reimpresso em Wheeler & Zurek (1983), *op.cit.*, pp. 369-96. Tradução para o português a sair em Pessoa Jr., O. (org.), *Fundamentos da Física 3 – Simpósio David Bohm*. São Paulo: Livraria da Física, 2003.

Borel, É. (1914), *Le Hasard*. Paris: Alcan.

Chibeni, S.S. (1997), *Aspectos da Descrição Física da Realidade*, Coleção CLE 21, CLE-Unicamp, pp. 62-66, 104-15.

Clauser, J.F. & Horne, M.A. (1974), “Experimental Consequences of Objective Local Theories”, *Physical Review D 10*, 526-35.

Clauser, J.F.; Horne, M.A.; Shimony, A. & Holt, R.A. (1969), Proposed Experiment to Test Local Hidden-Variable Theories , *Physical Review Letters 23*, 880-884. Reproduzido em Wheeler & Zurek (1983), *op.cit*, pp. 409-13.

Clauser, J.F. & Shimony, A. (1978), “Bell’s Theorem: Experimental Tests and Implications”, *Reports of Progress in Physics 41*, 1881-1927.

D’Espagnat, B. (1979), “The Quantum Theory and Reality”, *Scientific American 241* (nov.), 128-40.

Einstein, A; Podolsky, B. & Rosen, N. (1935), “Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality be Considered Complete?”, *Physical Review 47*, 777-80. Reproduzido *in* Wheeler & Zurek, *op.cit.*, pp. 138-41. Tradução para o português em *Cadernos de História e Filosofia da Ciência 2* (1981) 90-96.

Heisenberg, W. (1958), *Physics and Philosophy*, Allen & Unwin, Londres, 1958. Tradução para o português: *Física e Filosofia*, Editora da UnB, Brasília, 1981.

Howard, D. (1989), “Holism, Separability, and the Metaphysical Implications of the Bell Experiments”, em Cushing, J.T. & McMullin, E. (orgs.): *Philosophical Consequences of Quantum Theory*, University of Notre Dame Press, pp. 224-53.

Jarrett, J.P. (1984), “On the Physical Significance of the Locality Conditions in the Bell Arguments”, *Noûs 18*, 569-89.

Margenau, H. (1954), “Advantages and Disadvantages of Various Interpretations of the Quantum Theory”, *Physics Today 7* (out.), 6-13.

Marshall, T.W.; Santos, E. & Selleri, F. (1983), “Local Realism has not been Refuted by Atomic Cascade Experiments”, *Physics Letters 98 A*, 5-9.

Leggett, A.J. (1986), “Quantum mechanics at the macroscopic level”, in de Boer, J.; Dal, E. & Ulfbeck, O. (orgs.), *The Lessons of Quantum Theory*. Amsterdã: Elsevier.

Pessoa Jr., O. (2003), *Conceitos de Física Quântica*. Vol. 1. São Paulo: Livraria da Física.

Pessoa Jr., O. (2004), “Conseqüências Filosóficas do Teorema de Bell”, em Chediak, K. & Videira, A.A.P. (orgs.), *Temas de Filosofia da Natureza*, UERJ, Rio de Janeiro, pp. 93-122.

Pessoa Jr., O. (2006), *Conceitos de Física Quântica*. Vol. 2. São Paulo: Livraria da Física.

Redhead, M. (1987), *Incompleteness, Non-Locality and Realism*. Oxford: Clarendon.

Shimony, A. (1984), “Controllable and Uncontrollable Non-Locality”, in Kamefuchi, S. *et al.* (orgs.), *Foundations of Quantum Mechanics in the Light of New Technology*. Tóquio:

Physical Society of Japan, pp. 225-30. Republicado em Shimony, A. (1993), *Search for a Naturalistic Worldview*, vol. 2, Cambridge U. Press, pp. 130-9.

Wheeler & Zurek (orgs.) (1983), *Quantum Theory and Measurement*. Princeton: Princeton University Press.