Provas resolvidas da UFRGS 2007

__**Matemática**__

01. Resposta (B)

1.000.000.000.000 ——— 20.000 ton.

24.000 ——— x

$$x = \frac{2\cancel{0}.\cancel{000.000}x24.\cancel{000}}{1.00\cancel{0}.\cancel{000.000.000}} = \frac{48}{100} = 0,48$$

Trata-se de uma aplicação de regra de três simples direta.

20.000 ton. x 1.000 = 20.000.000 kg

R$ ——— kg

1012 ——— 20.000.000

24.103 ——— x

$$x = \frac{20.000.000\,x\ 24\,.\,10^3}{10^{12}} = \frac{2\,.\,10^7\,.\,24\,.\,10^3}{10^{12}} = \frac{48}{100} = 0,48$$

02. Resposta (D)

Renda per capita Brasil = RCB
Renda per capita China = RCC
PIB Brasil = PIBB
PIB China = PIBC
População Brasil = PopB
População China = PopC

$$\frac{PIBC}{PIBB} = 2,8$$
$$\frac{PopC}{PopB} = 7$$

$$\left.\begin{aligned} RCB &= \frac{PIBB}{PopB} \\ RCC &= \frac{PIBC}{PopC} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{RCB}{RCC} = \frac{\frac{PIBB}{POPB}}{\frac{PIBC}{POPC}} = \frac{\frac{PIBB}{POPB}}{\frac{2,8\,.\,PIBC}{7\,.\,POPC}} \Rightarrow \frac{RCB}{RCC} = \frac{7}{2,8} = 2,5 \Rightarrow PCB = 2,5\ RCC \Rightarrow PIB = 250\%\ PIBC$$

RCB – RCC = 250% - 100% = **150%**

03. Resposta (D)

Usuários de banda larga, Jan/2005
10,6 → 100%
x → 50,9%

$x \cong 5,4$

Usuários de banda larga, Mai/2006
13,2 → 100%
y → 68,2%

$y \cong 9$

Crescimento:
5,4 → 100%
9 → z

$z \cong 166,66...\%$

Número de usuários cresceu entre 65% e 75%.

04. Resposta (B)

360	2		56	2
180	2		28	2
90	2		14	2
45	3		7	7
15	3		1	
5	5			
1				

23 . 325 23 . 7

mmc (360, 56) = 23 . 32 . 5 . 7

$$\frac{\cancel{2^3.3^2.5}.7}{\cancel{360}} = 7$$

05. Resposta (A)

Simplificando a terceira fração convenientemente,

$$\frac{2n}{2n+1}-\frac{2n}{2\left(n+\frac{1}{2}\right)}$$

Logo, devemos comparar 3 frações cujo numerador é o mesmo. Assim, os resultados menores terão os maiores denominadores, e vice-versa.

$$n+1>n+\frac{1}{2}>n-1 \text{ para } n\in \mathbb{N},\ n>1$$

$$\text{Portanto, } \frac{n}{n+1}<\frac{n}{n+\frac{1}{2}}<\frac{n}{n-1}$$

$$\text{Assim, } \frac{n}{n+1}<\frac{2n}{2n+1}<\frac{n}{n-1}$$

06. Resposta (E)

$$z=|z|.(\cos\alpha+i\,\text{sen}\,\alpha)$$

$$z=2.\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6}\right)$$

$$z=2.\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i.\frac{1}{2}\right)$$

$$z=\sqrt{3}+i$$

07. Resposta (B)

Qualquer conjunto de 4 potências sucessivas de *i* com expoentes naturais tem soma zero.

Na seqüência de termos desde i^0 até i^{2007}, temos 2008 potências sucessivas.

Como 2008 é divisível por 4, temos 502 seqüências de 4 potências sucessivas de *i*, cada uma delas com soma zero. Portanto, a soma dos 2008 termos vale zero.

08. Resposta (E)

Na P.A. de razão $\frac{1}{2}$, considerando primeiro termo igual a *x*, temos:

$$a_7=a_1+6r=x+6.\frac{1}{2}=x+3$$

$$a_{19}=a_1+18r=x+18.\frac{1}{2}=x+9$$

Os termos $(a_1,a_7,a_{19})=(x,x+3,x-9)$ formam uma P.G. Logo,

$$(x+3)^2=x(x+9)$$

$$x=3$$

A partir daí, tem-se que a P.G. resultante é $(3,6,12)$, e a soma dos termos é 21.

09. Resposta (C)

A reta suporte do lado *t* tem declividade positiva, e portanto é o maior valor entre os três.

As retas suporte dos lados *s* e *r* têm declividades negativas. Como a inclinação de *s* é maior que a inclinação de *r*, o módulo da declividade de *s* será também maior que o módulo da declividade de *r*. Logo, o valor algébrico da declividade de *s* é menor que o valor algébrico da declividade de *r*.

Assim, temosa como resposta correta a seqüência *s*, *r* e *t*.

10. Resposta (C)

A área do triângulo *ABP* é $S_{ABP}=\frac{\overline{AB}.h}{2}$. Como o segmento $\overline{AB}$ tem tamanho fixo, a superfície do triângulo *ABP* depende apenas da altura h correspondente à projeção perpendicular do vértice P em relação à reta suporte do segmento $\overline{AB}$. O ângulo $P\hat{B}A$ tem seu seno determinado por h e x na relação

$$\text{sen}\, P\hat{B}A = \frac{h}{x}$$

$$h = x.\text{sen}\, P\hat{B}A$$

Como sen $P\hat{B}A$ é uma constante, a altura varia de maneira diretamente proporcional a x.

Logo, o gráfico resultante é uma semi-reta do tipo $y = k.x$, com $k > 0$ e $x > 0$ conforme a alternativa (C).

11. Resposta (E)

Considerando que $g(x)$ é uma função logarítmica e sabendo que $\log_a 1 = 0$, podemos afirmar que o ponto de intersecção da função g com o eixo horizontal tem abscissa 1. Logo, a base do retângulo destacado é 1. Como sua área é $\frac{1}{2}$, pode-se concluir que a altura é $\frac{1}{2}$. Logo, o par ordenado $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ pertence ao gráfico de $f(x)$, conforme figura.

A partir daí, vem

$$f(1) = \frac{1}{2} \qquad f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$$\frac{1}{2} = a^1 \qquad f(2) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{4}$$

$$a = \frac{1}{2} \qquad f(2) = \frac{1}{4}$$

$$g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$$

$$g(2) = \log_{\frac{1}{2}} 2$$

$$g(2) = -1$$

$$f(2) - g(2) =$$

$$\frac{1}{4} - (-1) =$$

$$\frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$$

12. Resposta (D)

$$x = \sqrt[5]{1000} = (10^3)^{\frac{1}{5}} = 10^{\frac{3}{5}}$$

$$x = 10^{\frac{3}{5}}$$

$$\log x = \log 10^{\frac{3}{5}}$$

$$\log x = \frac{3}{5}.\log 10$$

$$\log x = \frac{3}{5}$$

$$\log x = 0{,}6$$

Consultando a tabela, conclui-se que $x = 3{,}98$.

13. Resposta (A)

$c = 2$

$x_v = -1$

$\frac{-b}{2a} = -1$

$-b = -2a$

$b = 2a$

$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = 3$

$y_v = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$

$y_v = -\frac{(2a)^2 - 4a.2}{4a}$

$y_v = -\frac{4a^2 - 8a}{4a}$

$y_v = -\frac{4a(a-2)}{4a}$

$y_v = -(a-2)$

$y_v = -a + 2 = 3$

$a = -1$

$b = 2(-1)$

$b = -2$

$a + b = -1 - 2 = -3$

14. Resposta (C)

$P = \frac{-Ti}{a}$

$(-1)(-1).2 = \frac{-2}{a}$

$a = \frac{-2}{2}$

$a = -1$

P(x)= $a\,(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$

P(x)= $a\,(x - (-1))(x - (-1))(x - 2)$

P(x)= $a\,(x+1)(x+1)(x-2)$

P(x)= $-1\,(x+1)(x+1)(x-2)$

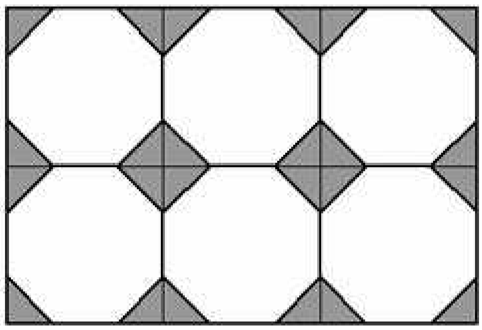
P(-2)= -1(-2+1)(-2+1)(-2-2)

P(-2)= -1(-1)(-1)(-4)

P(-2)= 4

15. Resposta (E)

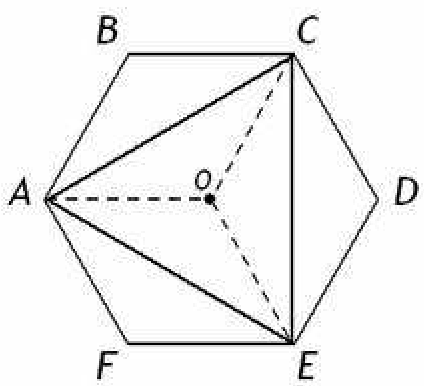
A área sombreada é igual à soma das áreas dos 24 triângulos retângulos isósceles destacados na figura.



A hipotenusa de cada um dos 24 triângulos retângulos isósceles mede 2. Logo, a medida de seus catetos é $\sqrt{2}$, e conseqüentemente a área de cada triângulo mede $\frac{\sqrt{2}.\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{2} = 1$. Portanto, a soma das regiões sombreadas na figura é igual a 24.1 = 24.

16. Resposta (E)

Identificando os vértices e o centro coincidente do triângulo eqüilátero e do hexágono regular, conforme a figura, observa-se facilmente que há congruência entre os pares de triângulos ABC e AOC, CDE e COE, bem como EFA e EOA. Portanto, a área do hexágono regular é o dobro da área do triângulo eqüilátero referido na questão.



18. Resposta (A)

O volume do cubo de aresta 6 é igual a $6^3 = 216$.

Cada uma das quatro pirâmides a serem subtraídas tem por base um triângulo retângulo isósceles com catetos medindo 3 cada. Logo, a área da base de cada pirâmide é $\frac{3.3}{2} = \frac{9}{2}$.

Como a altura de cada pirâmide também é 3, tem-se que o volume de cada pirâmide é $\frac{\left(\frac{9}{2}\right).3}{3} = \frac{9}{2}$.

Como são quatro as pirâmides equivalentes a serem retiradas, temos que o volume a ser subtraído é $4.\left(\frac{9}{2}\right) = 18$.

Logo, o volume final é $216 - 18 = 198$.

19. Resposta (D)

Tomando as três retas duas a duas, pode-se determinar os pontos de intersecção correspondentes aos vértices do triângulo procurado.

$$\begin{cases} y = -2x + 9 \\ x = 1 \end{cases} \rightarrow (1,7)$$

$$\begin{cases} y = -2x + 9 \\ y = 1 \end{cases} \rightarrow (4,1)$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \rightarrow (1,1)$$

A partir daí, pode-se calcular a área do triângulo por intermédio de determinantes.

$$S_\Delta = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \left|-18\right| = 9$$

20. Resposta (B)

Ligando cada vértice do octógono regular ao centro do círculo, teremos 8 triângulos isósceles equivalentes cujos lados congruentes medem 2 (raio do círculo) e formam entre si ângulo de $\frac{360°}{8} = 45°$.

A área de cada triângulo é, portanto, igual a $\frac{2.2.\operatorname{sen} 45°}{2} = 2.\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$.

Como o octógono é formado por 8 triângulos equivalentes, temos que sua superfície é igual a $8\sqrt{2}$.

21. Resposta (C)

Observe que são fornecidos dois lados adjacentes do triângulo em questão, bem como o ângulo por eles compreendido. Portanto, usaremos a mesma determinação de área usada na questão de número 20.

Temos então

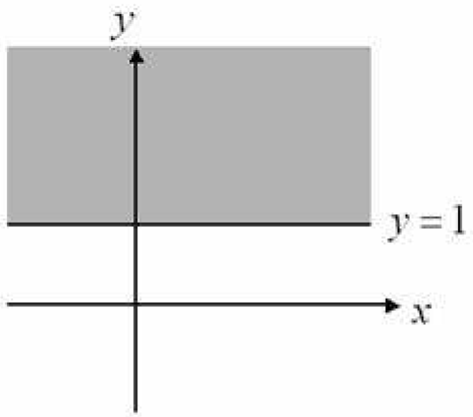
$$S_\Delta = \frac{20.45.\operatorname{sen} 120°}{2} = 450.\frac{\sqrt{3}}{2} = 225\sqrt{3}$$

.

22. Resposta (A)

É conveniente a separação do problema em duas desigualdades simples independentes.

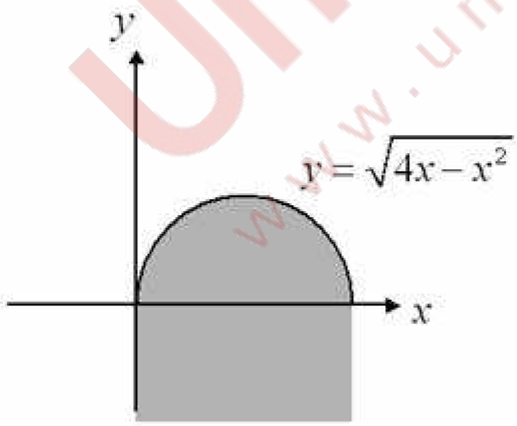
1) $1 \le y \rightarrow y \ge 1$
(região do plano cartesiano limitada inferiormente pela reta horizontal $y=1$),



2)

$$y \le \sqrt{4x - x^2}$$
$$y^2 \le 4x - x^2$$
$$x^2 + y^2 - 4x \le 0$$

(região do plano limitada superiormente pela semicircunferência de equação $y = \sqrt{4x - x^2}$, com centro $C(2,0)$ e raio $R = 2$)



Observe que a intersecção entre as duas regiões sombreadas equivale ao que está apresentado na alternativa A.

23. Resposta (C)

Afirmação I – Verdadeira

Para o sistema ter solução única, ele deve ser possível e determinado, o que implica em $\Delta \neq 0$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ p & q \end{vmatrix} = q - p \neq 0 \rightarrow p \neq q$$

Afirmação II – Falsa

A partir da conclusão obtida pela análise da afirmação I, pode-se inferir que $\Delta = 0$ quando $p = q$.

Sabendo que $p = q = 1$, teremos $\Delta = 0$ e $\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, o que resulta em sistema possível e indeterminado com infinitas soluções.

Afirmação III – Verdadeira

Sabendo que $p = q = 0$, teremos $\Delta = 0$ e $\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$, o que resulta em sistema possível e indeterminado com infinitas soluções.

24. Resposta (A)

P(obter 6 pelo menos uma vez) = $1-$ P(obter sempre um dos cinco resultados diferentes de 6)

$= 1-\frac{5}{6}.\frac{5}{6}.\frac{5}{6}$

$= 1-\left(\frac{5}{6}\right)^3$

25. Resposta (B)

Considerando *x* bolas amarelas:

Total de bolas na caixa = $20+18+x=38+x$

Total de bolas amarelas = *x*

$$P(\text{retirada de bola amarela}) = \frac{x}{38+x} = \frac{1}{3}$$

Logo, $x=19$.