Universitário

Vestibular UFRGS 2013
Resolução da Prova de Matemática

26. Alternativa (C)

100 bilhões
100 . (1 000 000 000)
100 000 000 000
10^{11}

27. Alternativa (B)

Quando multiplicamos dois números com o algarismo das unidades igual a 4, o algarismo das unidades desse produto será 6. Ao multiplicar um número com o algarismo das unidades igual a 4 por outro com o algarismo das unidades igual a 6, esse produto terá como algarismo das unidades o valor 4. Assim, o algarismo das unidades de 44^{54} é 6.

Quando multiplicamos dois números com o algarismo das unidades igual a 5, o algarismo das unidades desse produto será 5. Assim, o algarismo das unidades de 55^{45} é 5.

Por fim, ao somarmos um número com o algarismo das unidades igual a 6 com outro cujo algarismo das unidades seja 5, obtemos um resultado com o algarismo das unidades igual a 1.

28. Alternativa (D)

$$\text{Razão} = \frac{8\text{Gb}}{68\text{Kb}} = \frac{8.10^9}{68.10^3} = \frac{8\,000\,000\,000}{68\,000} \approx 117\ \ 000$$

29. Alternativa (A)

A medalha de massa de 400g.
Logo foram 46 medalhas com 1,34% de ouro, assim:

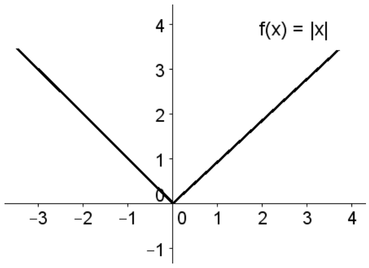
46 x 400 x 1,34%
46 x 4 x 1,34
184 x 1,34
256,56g

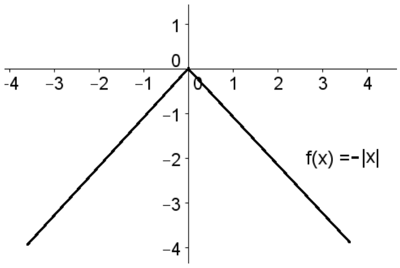
30. Alternativa (D)

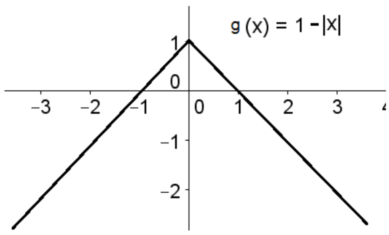
Quantidade de chuvas na região Sul em 2012 = 126
Média Histórica na região Sul em Outubro de 2012 = 100

100 → 126
aumento de 26%

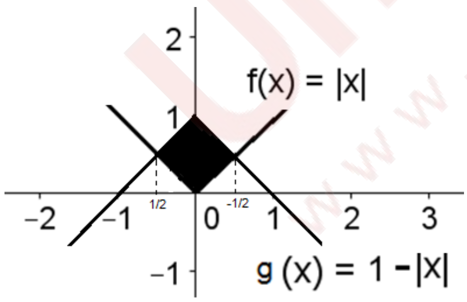
31. Alternativa (C)







A intenção da questão é a determinação da área do quadrado limitado pelos gráficos das funções dadas, como na figura abaixo.



Área do quadrado: $A = \frac{d^2}{2} = \frac{1^2}{2} = \frac{1}{2} = 0{,}5$.

32. Alternativa (B)

$f(x) = x^2 - 6x + 9$
$f(x) = -f(x)$
$x^2 - 6x + 9 = -(x^2 - 6x + 9)$
$x^2 - 6x + 9 = -x^2 + 6x - 9$
$2x^2 - 12x + 18 = 0$
$x^2 - 6x + 9 = 0$

Aplicando Báskara, temos $x_1 = x_2 = 3$.
Logo, uma única solução.

33. Alternativa (D)

Ao fazer o módulo de f(x), os valores positivos de mantém e a parte negativa são refletidos em relação ao eixo ‘x’. Logo, o gráfico da função Z é correspondente a letra D.

34. Alternativa (B)

Pares de 1 a 100 representam uma P.A. com:

$a_1 = 2$
$a_n = 100$
$r = 2$

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$
$100 = 2 + (n-1) \cdot 2$
$n = 50$

Ímpares de 1 a 100 representam uma P.A. com:

$a_1 = 1$
$a_n = 99$
$r = 2$

Analogamente $n = 50$.

Soma dos termos da P.A.

$$S = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$
$$S_{pares} = \frac{(2+100) \cdot 50}{2}$$
$$S_{pares} = 102 \cdot 25$$

$$S_{ímpares} = \frac{(1+99) \cdot 50}{2}$$
$$S_{ímpares} = 100 \cdot 25$$

Portanto, $S_{pares} - S_{ímpares} = 102 \cdot 25 - 100 \cdot 25 = 25 \cdot (102 - 100) = 50$

35. Alternativa (A)

De acordo com o enunciado, temos que a sequencia dos lados dos respectivos triângulos é $1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \ldots$. Portanto, uma Progressão Geométrica infinita de razão $\frac{2}{3}$. Como o perímetro é o **triplo** do lado, a soma dos **perímetros** dos infinitos triângulos é dada por:

$$S_\infty = \left(\frac{a_1}{1-q}\right) \cdot 3$$
$$S_\infty = \left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}}\right) \cdot 3$$
$$S_\infty = 9$$

36. Alternativa (E)

$$a_1 - a_{100} = a_1 - (a_1 + 99r)$$
$$a_1 - a_{100} = -99r$$

$$a_2 - a_{99} = (a_1 + r) - (a_1 + 98r)$$
$$a_2 - a_{99} = -97r$$

$$a_3 - a_{98} = (a_1 + 2r) - (a_1 + 97r)$$
$$a_3 - a_{98} = -95r$$

Logo, temos uma P.A. de razão $2r$.

37. Alternativa (B)

Considerando a P.G. de 15 termos (partindo de hoje, tempo zero). Cujo primeiro termo vale 10 e razão vale 2. O último termo refere-se:

$a_{15} = a_1 . q^{14} = 10.2^{14}$

$\log a_{15} = \log 10.2^{14}$

$\log a_{15} = \log 10 + 14.\log 2$

$\log a_{15} = 1 + 4,2$

$\log a_{15} = 5,2$

$a_{15} = 10^{5,2}$

38. Alternativa (A)

p(x) = $x^3 + 5x^2 + 4x$
p(x) = $x.(x^2 + 5x + 4)$

Aplicando Báskara em $x^2 + 5x + 4$ temos $x_1 = -4$ e $x_2 = -1$.
O polinômio p(x) tem termo independente zero, logo tem uma raiz nula e outras duas raízes que são os zeros de $x^2 + 5x + 4$.

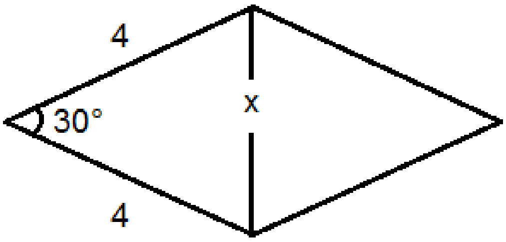
As raízes de p(x) são -4, -1 e 0

39. Alternativa (E)

A imagem do gráfico de f(x) = sen 2x é [-1, 1]. A única alternativa que não contem imagem de f(x) é $3 + 2^x$.

g(x) = $3 + 2^x$ tem por gráfico uma exponencial crescente de imagem $(3, +\infty)$.

40. Alternativa (C)



Pela lei dos cossenos temos que:

$$x^2 = 4^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \cos 30°$$

$$x^2 = 16 + 16 - 32 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x^2 = 32 - 16\sqrt{3}$$

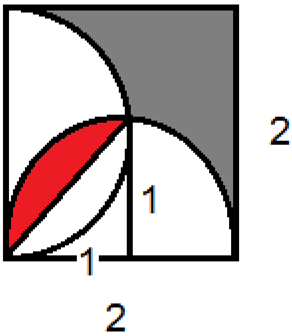
$$x = \sqrt{16\left(2 - \sqrt{3}\right)}$$

$$x = 4\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

41. Alternativa (D)

Observe que a figura sombreada é um quadrado de lado **a – b**. Assim, a área é (a – b).(a – b) = a^2 - 2ab + b^2.

42. Alternativa (E)



$$S_H = S_{\square} - S_{\text{O}} + S_{\text{interseção}}$$

$$S_H = 2^2 - \pi r^2 + \left(\frac{S_{\text{O}}}{4} - S_{\triangle}\right)\cdot 2$$

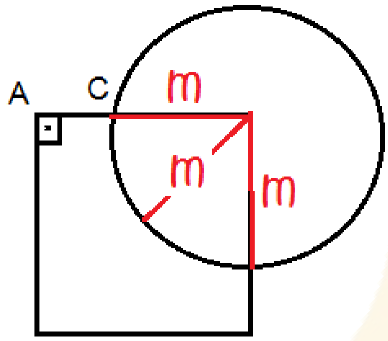
$$S_H = 4 - \pi 1^2 + \left(\frac{\pi 1^2}{4} - \frac{1\cdot 1}{2}\right)\cdot 2$$

$$S_H = 4 - \pi + \frac{\pi}{2} - 1$$

$$S_H = 3 - \frac{\pi}{2}$$

43. Alternativa (A)

Considere a ilustração:



Na figura acima, percebemos que os segmentos designados pela letra *m* representam o raio do círculo e consequentemente a metade de diagonal do quadrado.

Diagonal do quadrado:

$$d = a\sqrt{2}$$

$$m = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$
$$m = \frac{2\sqrt{2}}{2}$$
$$m = \sqrt{2}$$

Como o lado do quadrado vale 2 e subtraindo desse a medida *m*, temos a medida $\overline{AC}$.

$$\overline{AC} + m = 2$$
$$\overline{AC} + \sqrt{2} = 2$$
$$\overline{AC} = 2 - \sqrt{2}$$

Como o triângulo ABC é retângulo, com catetos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ congruentes, sua área é dada por:

$$S_{ABC} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{2}$$
$$S_{ABC} = \frac{\left(2-\sqrt{2}\right) \cdot \left(2-\sqrt{2}\right)}{2}$$
$$S_{ABC} = 3 - 2\sqrt{2}$$

44. Alternativa (E)

Analisando os modelos, as únicas possibilidades de formar um cubo são I, III e V.

45. Alternativa (C)

O sólido é considerado um prisma de base triangular. A área do triângulo é a metade da área do quadrado (base do cubo). A altura do prisma é a aresta do cubo. Logo, o volume do prisma é a metade do volume do cubo, isto é, 256.

46. Alternativa (E)

Intersecção de f(x) e g(x)

f(x) = g(x)

$x^2 + x - 2 = 6 - x$
$x^2 + 2x - 8 = 0$

Aplicando Báskara em $x^2 + 2x - 8 = 0$, temos $x_1 = 2$ e $x_2 = -4$
Aplica-se x_1 e x_2 em g(x) para se descobrir as coordenadas de y nas intersecções.

P1(2, 4)   P2(-4,10)

Aplicando a distância entre os dois pontos:

$$\sqrt{(-4-2)^2 + (10-4)^2}$$
$$\sqrt{(-6)^2 + (6)^2}$$
$$\sqrt{36+36}$$
$$\sqrt{72}$$
$$6\sqrt{2}$$

47. Alternativa (A)

Para a equação do círculo precisamos do raio, que podemos obter pela distância do centro a reta r.

$$R = \left| \frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| = \left| \frac{3.7 + (-4).2 + 12}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} \right| = 5$$

Logo, a equação é:

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2$$

$$(x - 7)^2 + (y - 2)^2 = 5^2$$

48. Alternativa (B)

$$\begin{cases} 5x + 4y = -2 \\ 3x - 4y = 20 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -20 - 12 = -32$$

Como $\Delta \neq 0$, o sistema tem uma solução.

49. Alternativa (A)

Escolhendo numa caixa 4 bolas pretas, tem-se:

$$P = \frac{6}{12} . \frac{5}{11} . \frac{4}{10} . \frac{3}{9} = \frac{1}{33}$$

50. Alternativa (C)

Seja **a** o lado do triângulo, **R** o raio do círculo e **L** o lado do hexágono.

$$\text{Área}_{\text{triângulo}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Área}_{\text{hexágono}} = 6.\frac{L^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3L^2\sqrt{3}}{2}$$

Observe que $R = \frac{L\sqrt{3}}{2}$

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{L\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow L = \frac{2a}{3}$$

$$\text{Área}_{\text{hexágono}} = \frac{3L^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3\left(\frac{2a}{3}\right)^2\sqrt{3}}{2} = \frac{2a^2\sqrt{3}}{3}$$

Logo, a área total sem a triangular é:

$$\frac{2a^2\sqrt{3}}{3} - \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{5a^2\sqrt{3}}{12}.$$

Assim, a probabilidade é:

$$P = \frac{\frac{5a^2\sqrt{3}}{12}}{\frac{2a^2\sqrt{3}}{3}} = \frac{5}{8} = 0{,}625 = 62{,}5\%$$