Vestibular UFRGS 2015

Resolução da Prova de Matemática

26. Alternativa (D)

$$(0{,}125)^{15} = \left(\frac{1}{8}\right)^{15} = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\right]^{15} = [(2)^{-3}]^{15} = 2^{-45}$$

27. Alternativa (C)

Algarismo da unidade de 9^{99} é 9

Algarismo da unidade de 4^{44} é 6

9 – 6 = 3

28. Alternativa (E)

$$10^{-3}.10^{-3}.10^{-3}.10^{-3} = 10^{-12}$$

$$10^{-12}.X = 10$$

$$X = \frac{10}{10^{-12}} = 10^{13}$$

29. Alternativa (C)

$$f(x) = 2 \qquad g(x) = x^2 - 5x + 6 \qquad h(x) = x^2 - 11x + 30$$

$$f(x) = g(x)$$

$$x^2 - 5x + 6 = 2$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

As funções f e g têm seus pontos de encontro em x= 1 e x =4.

$$f(x) = h(x)$$

$$x^2 - 11x + 30 = 2$$

$$x^2 - 11x + 28 = 0$$

As funções f e h têm seus pontos de encontro em x= 4 e x = 7.

Portanto, o gráfico f intercepta os gráficos g e h em 3 pontos distintos.

30. Alternativa (E)

(A) falso, pois nem mesmo foi sempre crescente.

(B) falso, a porcentagem de crescimento foi aproximadamente 15%. Taxa = $\frac{final}{inicial} = \frac{22,3}{19,3} \cong 1,15$.

(C) falso, pois há valores menores que o de 2009 no século XXI conforme gráfico.

(D) falso, a porcentagem de crescimento foi aproximadamente 47%. Taxa = $\frac{final}{inicial} = \frac{36,3}{24,6} \cong 1,47$.

(E) verdadeiro, Taxa = $\frac{final}{inicial} = \frac{36,3}{24,6} \cong 1,47$.

31. Alternativa (E)

f(x) = x² – 4x + 3

Vértice (X_v, Y_v)

$$X_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-4)}{2.1} = \frac{4}{2} = 2$$

$$Y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{((-4)^2 - 4.1.3)}{4.1} = \frac{4}{4} = 1$$

$(2,\ 1)$

g(x) = –x² – 4x – 3

Vértice (X_v, Y_v)

$$X_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-4)}{2.(-1)} = \frac{4}{-2} = -2$$

$$Y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{((-4)^2 - 4.(-1).(-3))}{4.(-1)} = \frac{4}{-4} = -1$$

$(-2,\ -1)$

Distância entre os vértices:

$$dist_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$dist_{AB} = \sqrt{(-2-2)^2 + (-1-1)^2}$$
$$dist_{AB} = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2}$$
$$dist_{AB} = \sqrt{16+4}$$
$$dist_{AB} = \sqrt{20}$$
$$dist_{AB} = 2\sqrt{5}$$

32. Alternativa (A)

A única possibilidade de se apostar em 6 números distintos em PG é 1, 2, 4, 8, 16, 32.
Qualquer outra PG de razão inteira de 6 números distintos não se encaixa na condição estabelecida pelo problema: estar entre 1 a 60.

33. Alternativa (B)

Figura 1 $\Rightarrow$ 0 trapézios

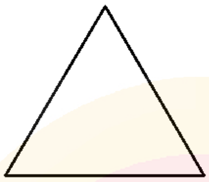


Figura 2 $\Rightarrow$ 1 trapézio

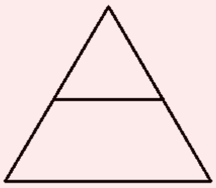


Figura 3 $\Rightarrow$ 3 trapézios

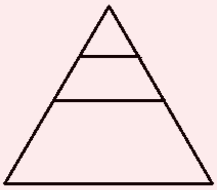
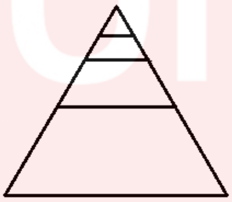


Figura 4 $\Rightarrow$ 6 trapézios



Cada figura é formado pela soma dos termos de uma P.A.

figura 1 = 0
figura 2 = 0 + 1
figura 3 = 0 + 1 + 2
figura 4 = 0 + 1 + 2 + 3

figura 6 = (a1 + a6).6/2 = 15

34. Alternativa (E)

Os raios das circunferências estão em progressão geométrica de razão de $\frac{1}{2}$.

A área de uma circunferência é dada por $A = \pi R^2$. Portanto, as áreas das circunferências estão em progressão geométrica de razão $\frac{1}{4}$. Logo, a soma das áreas é dada pelo limite da soma.

$$S_\infty = \frac{\pi}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4\pi}{3}$$

35. Alternativa (B)

$$100^{0,3} = 100^{log2} = (10^2)^{\log 2} = 10^{\log 2^2} = 10^{\log 4} = 4$$

36. Alternativa (B)

$N(t) = 500 . 1,02^t$

Trata-se de uma função exponencial crescente de base 1,02, isto é, uma taxa de aumento de 2% ao mês.

37. Alternativa (E)

Se P(2)=0 e P(-2)=0, então 2, e -2 são raízes do polinômio.

Soma das raízes = $\frac{-b}{a}$ e p(x) tem graus 4. Logo

$R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = -\frac{b}{a}$

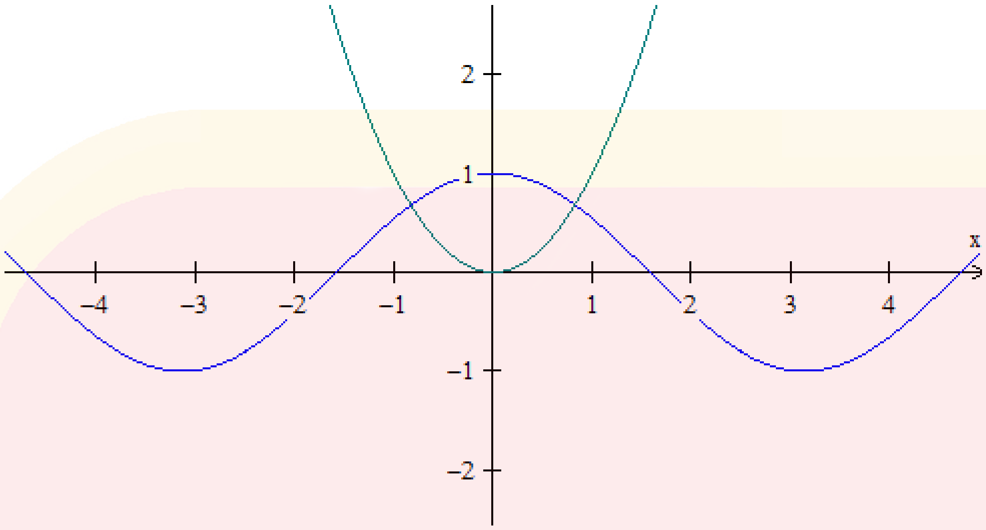
$2 + (-2) + R_3 + R_4 = -\frac{2}{1}$

$R_3 + R_4 = -2$

Única alternativa que corresponde seria a alternativa (E).

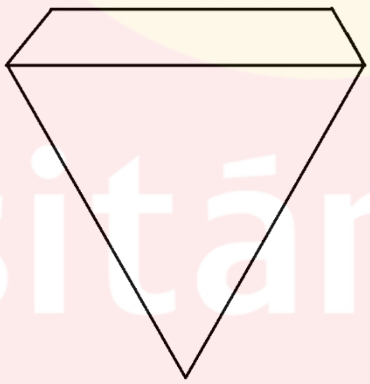
38. Alternativa (B)

Temos pontos de intersecção de f(x)= cos x e g(x)= x^2



39. Alternativa (C)

Separando o emblema em duas figuras diferentes, temos um triângulo equilátero e um trapézio.



Triângulo equilátero com lado 10

$Área = \frac{100\sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3}$

Trapézio com bases 8 e 10, e a altura 1

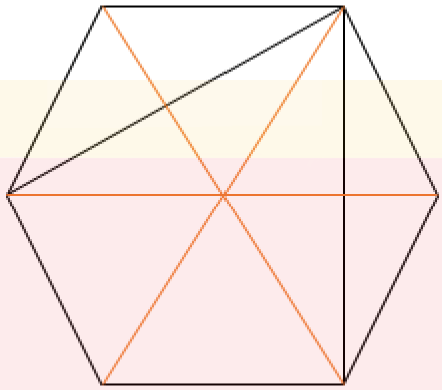
$Área = \frac{(10+8).1}{2} = \frac{18}{2} = 9$

Somando as duas áreas temos

$9+25\sqrt{3}$

40. Alternativa (A)

Dada a figura e desenhando algumas outras diagonais, vemos que a diagonal de valor 6, forma altura de dois triângulos equiláteros.



$6 = 2.\frac{l\sqrt{3}}{2}$

$6 = l\sqrt{3}$

Racionalizando, temos:

$2\sqrt{3} = l$

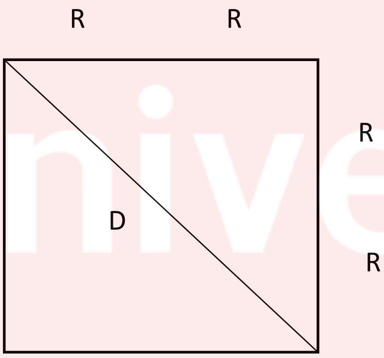
Com o lado, podemos fazer a área do hexágono:

Área = $\frac{6.(\,2\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4}$

Área $= \dfrac{6.12\sqrt{3}}{4}$

Área = $\frac{6.12\sqrt{3}}{4}$ $\rightarrow$ Área = $18\sqrt{3}$

41. Alternativa (D)



Unindo os raios temos um quadrado de lado 2R.

A distância entre os centros é a diagonal do quadrado:

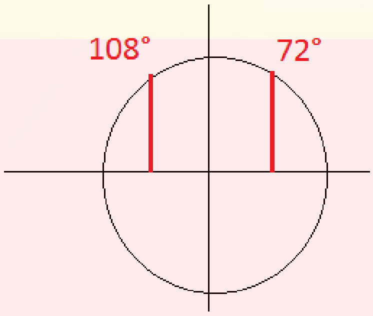
D = $l\sqrt{2}$

D = $2R\sqrt{2}$

42. Anulada

Observação:

A questão foi anulada pela banca. Embora não apresente inconsistência em seu enunciado ela contêm duas alternativas equivalentes, letra D e letra E, pois os valores de sen 72° e sen 108° são equivalentes, vide a representação no círculo trigonométrico abaixo:



43. Alternativa (A)

$$\frac{Hexagono_A}{Hexagono_B} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{24\sqrt{3}} = \frac{1}{16}$$

$$Hexagono_A = 6 \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

$$Hexagono_A = 6 \cdot \frac{1^2\sqrt{3}}{4}$$

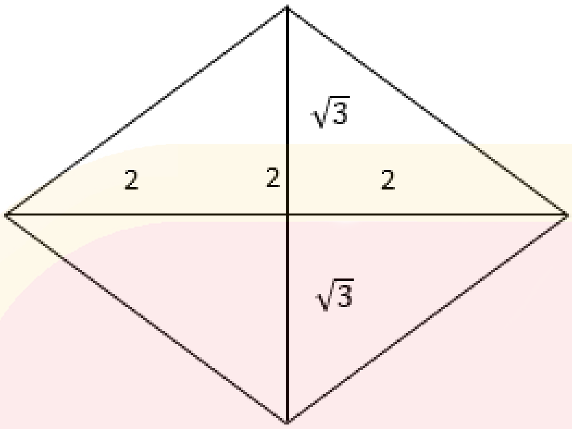
$$Hexagono_A = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$Hexagono_B = 6 \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

$$Hexagono_B = 6 \cdot \frac{4^2\sqrt{3}}{4}$$

$$Hexagono_B = 24\sqrt{3}$$

44. Alternativa (C)



Basta calcular a área do losango cujas diagonais são:

Diagonal maior = 6

Diagonal menos = $2\sqrt{3}$

$$A = \frac{D \cdot d}{2}$$

$$A = \frac{6 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}}{2}$$

$$A = 6 \cdot \sqrt{3}$$

45. Alternativa (D)

O sólido é formado por dois prismas como base um trapézio. Logo, o volume do sólido é duas vezes o volume do prisma com base um trapézio.

Volume do trapézio

$V = Área\ da\ base\ \cdot altura$

$V = \left(\frac{B + b}{2}\right) \cdot h \cdot h$

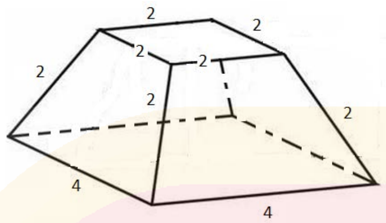
$V = \left(\frac{20 + 10}{2}\right) \cdot 5\sqrt{3} \cdot 10$

$V = 750\sqrt{3}$

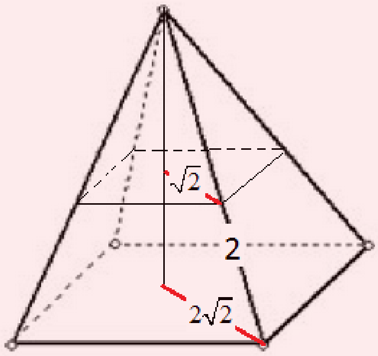
Logo, o volume do sólido é $1500\sqrt{3}$.

46. Alternativa (B)

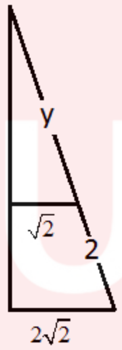
O sólido em questão é um tronco de pirâmide.



De onde prolongamos e obtemos a seguinte pirâmide:

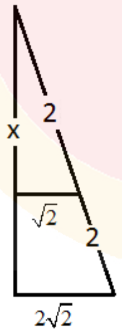


Do triângulo em destaque, por semelhança de triângulos obtemos a altura da pirâmide gerada:



$$\frac{y}{2} = \frac{y+2}{2\sqrt{2}}$$
$$y = 2$$

E, por Pitágoras no triângulo abaixo, temos:



$$2^2 = x^2 + \sqrt{2}^2$$
$$x = \sqrt{2}$$

E, por semelhança de triângulos, a altura da pirâmide é de $2\sqrt{2}$.

Volume da pirâmide superior (pequena):

$$V_p = \frac{Sb \cdot h}{3}$$
$$V_p = \frac{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2}}{3}$$
$$V_p = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

Volume da pirâmide grande:

$$V_g = \frac{SB \cdot H}{3}$$
$$V_g = \frac{4 \cdot 4 \cdot 2\sqrt{2}}{3}$$
$$V_g = \frac{32\sqrt{2}}{3}$$

Volume do Tronco de Pirâmide:

$$V_t = V_g - V_p$$
$$V_t = \frac{32\sqrt{2}}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3}$$
$$V_t = \frac{28\sqrt{2}}{3}$$

47. Alternativa (A)

Para determinar a interseção das circunferências, devemos resolver o sistema:

$$\begin{cases}(x-3)^2+(y-2)^2=16\\(x-10)^2+(y-2)^2=9\end{cases}$$

Isolando $(y-2)^2$ em cada equação, temos:

$$\begin{cases}(y-2)^2=16-(x-3)^2\\(y-2)^2=9-(x-10)^2\end{cases}$$

Igualando as equações:

$$16-(x-3)^2 = 9-(x-10)^2$$
$$16-(x^2-6x+9) = 9-(x^2-20x+100)$$
$$16-x^2+6x-9 = 9-x^2+20x-100$$
$$16+6x-9 = 9+20x-100$$
$$0=20x-6x-100-16+9+9$$
$$0=14x-98$$
$$98=14x$$
$$\frac{98}{14}=x$$
$$7=x$$

Atribuindo x = 7 nas equações das circunferências, temos:

$$(x-3)^2+(y-2)^2=16$$
$$(7-3)^2+(y-2)^2=16$$
$$(4)^2+(y-2)^2=16$$
$$16+(y-2)^2=16$$
$$(y-2)^2=0$$
$$y=2$$

(7, 2)

$$(x-10)^2+(y-2)^2=9$$
$$(7-10)^2+(y-2)^2=9$$
$$(-3)^2+(y-2)^2=9$$
$$9+(y-2)^2=9$$
$$(y-2)^2=0$$
$$y=2$$

(7, 2)

48. Alternativa (A)

Legenda:

x: moedas de R$ 1,00
y: moedas de R$ 0,50
z: moedas de R$ 0,25
w: moedas de R$ 0,10

Do enunciado, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x+0,5y+0,25z=6,75 \\ 0,5y+0,25z+0,1w=4,45 \\ 0,25z+0,1w=2,95 \end{cases}$$

Substituindo a 3ª equação na 2ª, temos:

$$\begin{aligned} &0,5y+0,25z+0,1w=4,45 \\ &0,5y+\quad 2,95 \quad\quad =4,45 \\ &y=3 \end{aligned}$$

Substituindo y = 3 no sistema inicial, tem-se:

$$\begin{cases} x+1,5+0,25z=6,75 \\ 1,5+0,25z+0,1w=4,45 \\ 0,25z+0,1w=2,95 \end{cases}$$

De onde vem:

$$\begin{cases} x+0,25z=5,25 \\ 0,25z+0,1w=2,95 \end{cases}$$

Subtraindo as duas equações temos:

$$\begin{cases} x+0,25z=5,25 \\ 0,25z+0,1w=2,95 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &x-0,1w=5,25-2,95 \\ &x-0,1w=2,3 \end{aligned}$$

Verificando as possibilidades a partir da equação $x-0,1w=2,3$

Se x=3 então w=7, então, de acordo com a equação $0,25z+0,1w=2,95$, tem-se z=9.

Somando x+y+z+w teremos 22.

Única solução possível dentre as alternativas apresentadas.

49. Alternativa (E)

De acordo com o enunciado temos as seguintes possibilidades:

204	240	260	280
206	246	264	284
208	248	268	286

402	420	460	480
406	426	462	482
408	428	468	486

Selecionando os números divisíveis por 2 e por 3 concomitantemente (divisíveis por 6), temos:

204	240	260	280
206	246	264	284
208	248	268	286

402	420	460	480
406	426	462	482
408	428	468	486

Probabilidade:

$$P = \frac{12}{24} = \frac{1}{2} = 50\%$$

50. Alternativa (C)

De acordo com o enunciado, ao girarmos a roleta, se os números 1, 2, 3, 4, e 10 forem sorteados, a pergunta a ser respondida será a de número 4. Portanto, há 5 chances de um total de 10, ou seja:

$$P = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$